Избранные главы
ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ
для инженеров и студентов втузов

Н. Н. ВОРОБЬЕВ

ТЕОРИЯ РЯДОВ



ИЗБРАННЫЕ ГЛАВЫ ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ
ДЛЯ ИНЖЕНЕРОВ И СТУДЕНТОВ ВТУЗОВ

Н. Н. ВОРОБЬЕВ

ТЕОРИЯ РЯДОВ

ИЗДАНИЕ ВТОРОЕ, СТЕРЕОТИПНОЕ

*Допущено Министерством
высшего и среднего специального образования СССР
в качестве учебного пособия для студентов
высших технических учебных заведений*



ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
Москва 1973

517.2
В 75
УДК 517.5

Теория рядов. Воробьев Н. Н., Главная редакция физико-математической литературы изд-ва «Наука», 1973.

В книге излагаются числовые ряды, функциональные ряды, степенные ряды и ряды Фурье. Курс составлен в точном соответствии с разделом «Ряды» программы по высшей математике для инженерно-технических специальностей высших учебных заведений. Поэтому его можно использовать не только как учебное пособие для слушателей курса лекций, но и при самостоятельной работе над предметом.

Илл. — 14

В $\frac{0223-1730}{042(02)-73}$ 25-73

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Данный курс составлен в точном соответствии с разделом «Ряды» программы по высшей математике для инженерно-технических специальностей высших учебных заведений. Поэтому его можно использовать не только как пособие для слушателей курса лекций, но и при самостоятельной работе над предметом.

Основной опасностью при изучении теории рядов автор считает вульгарное представление о ряде как о «сумме бесконечного числа слагаемых». Поэтому он принял против него все возможные профилактические меры, жертвуя иногда ради строгости наглядностью изложения.

Напротив, в согласии с обычной практикой прохождения курса теории рядов, обоснование интегральной формулы Фурье проводится при помощи нестрогих, правдоподобных («эвристических») рассуждений, а доказательства теоремы о дифференцировании степенных рядов в комплексной области и теоремы Дирихле о разложении в ряд Фурье опущены вовсе. Уравнение свободных малых колебаний струны с закрепленными концами и его решение методом Фурье, относимые некоторыми вариантами учебных программ к разделу «Ряды», выделены в самостоятельную главу.

Некоторым отклонением от традиции является глава 1, в которой на примере геометрических прогрессий демонстрируются практически все идеи курса (вплоть

до рядов Фурье). Эта глава является вспомогательной и преследует чисто методические цели.

Приводимые в книге примеры носят иллюстративный характер и не являются упражнениями для читателя. Поэтому параллельно с изучением материала данной книги необходимо пользоваться тем или иным сборником задач.

Автор признателен Р. С. Гутеру и П. М. Ризу за конструктивную и доброжелательную критику рукописи и за многочисленные ценные советы, а также редактору книги А. С. Чистопольскому за ряд улучшений текста.

За все критические замечания автор будет весьма благодарен.

Н. Н. Воробьев

ГЛАВА 1

ПРОГРЕССИИ

§ 1. Введение

При изучении теории рядов приходится сталкиваться с трудностями двоякого рода.

Во-первых, теория рядов, как и всякая математическая теория, имеет свой аналитический аппарат, состоящий из теорем, различных приемов преобразования формул, методов доказательств равенств и неравенств, вычислений пределов, подсчетов конечных сумм и т. д. Этот аппарат составляет существенную часть курса теории рядов, и его освоение требует основательного изучения (и в том числе запоминания) довольно большого числа утверждений и формул, а также практических навыков, приобретаемых в ходе решения задач. С этой точки зрения теория рядов в принципе мало чем отличается от тех частей математического анализа, которые составляли предмет предыдущих разделов курса высшей математики: дифференциального и интегрального исчислений. В этом смысле теория рядов никаких особых трудностей при своем изучении доставлять не будет. Кроме того, у нас на протяжении курса будет достаточно возможностей обращать внимание на аналитическую (так сказать, на «формульную») сторону вопроса и отрабатывать типичные приемы рассуждений и вычислений.

Однако ряды при своем изучении доставляют трудности еще и другого характера, связанные с необычностью самого объекта изучения, каковым является ряд. Дело в том, что ряд, по существу, является «суммой бесконечного числа слагаемых». Поставленное же в ка-

вычки выражение нельзя понимать буквально уже хотя бы потому, что обычная алгебра занимается только действиями над конечным числом компонент и, в частности, суммами конечного часла слагаемых. Значит, на самом деле речь идет не об обычной сумме, а о чем-то таком, что еще нужно правильно истолковать и понять. По этой же причине мы не можем безоговорочно пользоваться знакомыми еще по школьной элементарной математике такими привычными и такими удобными законами действий, как переместительный (коммутативный) или сочетательный (ассоциативный) законы. Более того, некритическое применение этих, казалось бы, незыблемых правил может привести к совершенно неверным ответам. Тем более осторожно следует относиться к переносу на ряды известных простых теорем о дифференцировании и интегрировании сумм, состоящих из конечного числа слагаемых. Правда, сходные трудности уже появлялись в ходе освоения понятия определенного интеграла (который тоже в какой-то мере может пониматься как «сумма бесконечного числа слагаемых», именно, как общий предел некоторых последовательностей обычных сумм, когда число слагаемых в этих суммах неограниченно возрастает). Особенно близкими оказываются сейчас для нас рассуждения, касающиеся несобственных интегралов с бесконечными пределами[1]). Однако следует иметь в виду, что в рамках программы нашего курса теория рядов более глубоко входит в эти вопросы, и возникающие в связи с этим трудности будут обильнее и серьезнее.

Чтобы избежать одновременного столкновения с трудностями обоих перечисленных типов, аналитическими и логическими, полезно до построения систематической теории рядов пронаблюдать основные понятия этой теории и их взаимосвязь на некотором частном, достаточно простом и по возможности известном примере, который будет для нас играть роль модели. В качестве такой модели мы рассмотрим теорию геометрических прогрессий.

[1]) В связи со сказанным можно настоятельио рекомендовать чнтателям вспомннть и вновь продумать во всех деталях определення определенного интеграла и, особенно, несобствеиного нитеграла с бесконечными пределамн.

§ 2. Геометрические прогресии

Последовательность вида

$$a,\ aq,\ aq^2,\ \ldots \tag{1.1}$$

называется *геометрической прогрессией*. При этом a называется *первым членом* прогрессии, а q — ее *знаменателем*.

На n-м месте в последовательности (1.1) должно стоять выражение aq^{n-1}. Оно называется *общим членом* прогрессии (1.1). Полагая в этом выражении $n=1,\ 2,\ \ldots$, мы можем записать и вычислить любой член этой прогрессии. Если $a=0$, то все члены прогрессии (1.1) также будут равны нулю. Этот малоинтересный случай мы далее не будем рассматривать.

Геометрические прогрессии могут быть численные:

$$6,\ 12,\ 24,\ 48,\ \ldots,$$

$$\frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{8},\ \frac{1}{16},\ \ldots,$$

$$1+\sqrt{2},\ 3+2\sqrt{2},\ 7+5\sqrt{2},\ 17+12\sqrt{2},\ \ldots,$$

$$i,\ -1,\ -i,\ 1,\ i,\ \ldots$$

и функциональные:

$$ax,\ ax^2,\ ax^3,\ \ldots,$$

$$x,\ x\sin x,\ x\sin^2 x,\ \ldots$$

Если в прогрессии (1.1) имеется только конечное число членов, т. е. если в ней существует последний член, то прогрессия называется *конечной*; в противном случае, если за каждым членом прогрессии следует еще хотя бы один член, то прогрессия называется *бесконечной*.

В случае конечной прогрессии

$$a,\ aq,\ \ldots,\ aq^{n-1} \tag{1.2}$$

можно говорить о сумме всех ее членов s:

$$s=a+aq+\ldots+aq^{n-1}. \tag{1.3}$$

Для вычисления s умножим почленно равенство (1.3) на знаменатель прогрессии q:

$$sq=aq+aq^2+\ldots+aq^n$$

и вычтем почленно полученное равенство из равенства (1.3). В результате мы получим

$$s(1-q)=a-aq^n.$$

Если при этом $q \neq 1$, то отсюда следует

$$s=\frac{a-aq^n}{1-q}; \tag{1.4}$$

если же $q=1$, то, как легко видеть, все члены прогрессии (1.2) равны друг другу, и сумма их, очевидно, равна an.

§ 3. Бесконечные прогрессии; их сходимость и расходимость

В случае бесконечной прогрессии

$$a,\ aq,\ \ldots,\ aq^{n-1},\ \ldots \tag{1.5}$$

о сумме s всех ее членов

$$a+aq+\ldots+aq^{n-1}+\ldots$$

пока говорить несколько преждевременно, поскольку мы еще не условились, какой смысл следует придавать этому выражению. Однако мы во всяком случае можем говорить о сумме s_n *первых* n членов этой прогрессии:

$$s_n=a+aq+\ldots+aq^{n-1},$$

которую можно назвать n-й *частичной суммой* прогрессии. $\left(\text{Как было только что выяснено, при } q \neq 1 \text{ эта сумма равна } \frac{a-aq^n}{1-q}.\right)$

Естественно считать суммой s бесконечной прогрессии (1.5) предел ее частичных сумм s_n при неограниченном возрастании n:

$$s=\lim_{n \to \infty} s_n.$$

Подчеркнем, что мы здесь *вводим определение* суммы всех членов прогрессии. Это определение действительно естественное: чем больше слагаемых мы возьмем в сумме вида s_n, тем «ближе» мы подойдем к предельному значе-

нию суммы. Поэтому не должно вызывать возражений, если в качестве «суммы всех» членов прогрессии мы этот предел и примем.

Таким образом, о сумме s можно говорить лишь тогда, когда существует конечный предел $\lim\limits_{n\to\infty} s_n$. В этом случае говорят, что прогрессия (1.5) *сходится*; если этого предела не существует, то говорят, что прогрессия (1.5) *расходится*.

Воспользовавшись формулой (1.4), определение s можно при $q\neq 1$ переписать как

$$s=\lim_{n\to\infty}\frac{a-aq^n}{1-q}.$$

Так как a и q от n не зависят, мы можем последнюю формулу представить в виде

$$s=\frac{a}{1-q}-\frac{a}{1-q}\lim_{n\to\infty}q^n. \tag{1.6}$$

Дальнейшее зависит от значения знаменателя q (напомним, что мы считаем $a\neq 0$).

Если $|q|<1$, то, очевидно, стоящий в (1.6) предел равен нулю и мы получаем

$$s=\frac{a}{1-q}.$$

Следовательно, при $|q|<1$ прогрессия (1.5) сходится.

Пусть теперь $|q|\geqq 1$. Предположим, что при этом

$$\lim_{n\to\infty}s_n=s.$$

Тогда, начиная с некоторого места, все s_n будут близки к s, отличаясь от s менее чем на некоторое сколь угодно малое, наперед заданное число ε. Тем самым они должны отличаться друг от друга менее чем на 2ε. Но в наших условиях разность двух соседних сумм, s_{n+1} и s_n, есть aq^n и вовсе не стремится к нулю (а при $|q|>1$ даже возрастает по модулю).

Таким образом, мы полностью выяснили вопрос о сходимости прогрессий. Оказалось, что сходятся те и только те прогрессии, у которых знаменатель по модулю меньше единицы.

Заметим, что этот вопрос был нами решен на основе непосредственного вычисления частичных сумм прогрессий и последующего перехода к пределу.

С какой скоростью сходятся сходящиеся прогрессии? Уметь ответить на этот вопрос важно потому, что многие применения прогрессий (как и рядов вообще) основаны на замене суммы всей прогрессии на некоторую ее частичную сумму или наоборот. Для прогрессий поставленный вопрос решается просто. Очевидно, для любой сходящейся прогрессии

$$s - s_n = \frac{aq^n}{1-q}.$$

Ясно, что чем ближе знаменатель прогрессии q к единице, тем хуже описывает частичная сумма s_n сумму s.

Если прогрессия расходится, то говорить о ее сумме, строго говоря, нельзя. Прямое вычисление этой суммы с некритическим использованием «обычных» математических средств может привести к парадоксальным явлениям.

Например, пусть мы имеем прогрессию со знаменателем, равным -1:

$$a, \ -a, \ a, \ -a, \ldots$$

«Сумма» этой прогрессии формально записывается как

$$a - a + a - a + \ldots$$

Объединяя попарно ее соседние члены, начиная с первого, мы получим

$$(a-a) + (a-a) + \ldots = 0 + 0 + \ldots = 0.$$

Объединяя же попарно соседние члены, начиная со второго, мы получим совсем другой ответ:

$$a + (a-a) + (a-a) + \ldots = a + 0 + 0 + \ldots = a.$$

§ 4. Функциональные прогрессии; область сходимости; равномерная сходимость

Рассмотрим теперь прогрессию, в которой как первый член, так и знаменатель являются функциями некоторого переменного x:

$$a(x), \ a(x)\,q(x), \ a(x)\,q^2(x), \ldots \qquad (1.7)$$

Такого рода прогрессии называются *функциональными*. Придавая переменной x те или иные значения, мы будем получать различные числовые прогрессии:

$$\begin{aligned} &a(x_1),\ a(x_1)\,q(x_1),\ a(x_1)\,q^2(x_1), \ldots, \\ &a(x_2),\ a(x_2)\,q(x_2),\ a(x_2)\,q^2(x_2), \ldots \end{aligned} \qquad (1.8)$$

и т. д.

В известном смысле можно говорить, что функциональная прогрессия (1.7) является своеобразной «функцией», а числовые прогрессии (1.8) — ее «значениями».

Некоторые из прогрессий (1.8) могут оказаться сходящимися, а другие — расходящимися. Из сказанного в предыдущем параграфе следует, что сходящимися будут те и только те прогрессии, для которых $|q(x)| < 1$. Кроме того, очевидно, сходятся также прогрессии, соответствующие тем значениям x, для которых $a(x) = 0$. Однако этот тривиальный случай не представляет интереса и мы его рассматривать не будем.

Принято говорить, что значения x, для которых $|q(x)| < 1$, составляют *область сходимости* функциональной прогрессии (1.7).

Мы видим, что решение вопроса о сходимости функциональной прогрессии (1.7) связано только со значением ее знаменателя $q(x)$, а функциональная зависимость q от x лишь выражает решение этого вопроса в несколько иной форме. Поэтому мы будем в качестве независимой переменной брать сам знаменатель и обозначать его через x. Далее, если отвлечься от неинтересного случая $a(x) = 0$, значение $a(x)$ не влияет на сходимость прогрессии. Поэтому мы в дальнейшем будем полагать $a(x) \equiv 1$ и ограничиваться, таким образом, функциональной прогрессией

$$1,\ x,\ x^2, \ldots \qquad (1.9)$$

Рассмотрим теперь «скорость» сходимости различных прогрессий вида (1.9), т. е. вопрос о том, насколько быстро нарастающие суммы их первых членов стремятся к суммам прогрессий.

Сумма первых n членов функциональной прогрессии (1.9) равна

$$\frac{1-x^n}{1-x}. \qquad (1.10)$$

Если $|x|<1$, то прогрессия (1.9) при этом значении сходится, а ее сумма равна

$$\frac{1}{1-x}. \qquad (1.11)$$

Разность между полной суммой (1.11) и частичной суммой (1.10) составляет

$$\frac{x^n}{1-x}. \qquad (1.12)$$

С ростом n эта разность, очевидно, убывает. С другой стороны, при каждом конкретном значении n при приближении x к единице числитель последней дроби возрастает, приближаясь также к единице, а знаменатель убывает, приближаясь к нулю. Следовательно, вся дробь возрастает. Поэтому, чтобы при x, близком к 1, разность (1.12) была достаточно малой, необходимо взять большое число n членов прогрессии. По мере приближения x к 1 это число n неограниченно возрастает.

Однако если ограничиваться значениями x, для которых

$$|x| \leqq \alpha < 1, \qquad (1.13)$$

то, очевидно, можно найти такое n, которое обеспечит любую наперед заданную малость разности (1.12) *при всех* таких x. Это обстоятельство называется *равномерной сходимостью* прогрессии (1.9) для всех x, удовлетворяющих неравенству (1.13).

Подчеркнем, что в неравенстве (1.13) число α может быть взято сколь угодно близким к единице, но должно быть строго меньше, чем 1.

§ 5. Почленное интегрирование прогрессий

Считая, что переменная x принимает вещественные значения, напишем тождество

$$1+x+\ldots+x^{n-1}=\frac{1}{1-x}-\frac{x^n}{1-x} \qquad (1.14)$$

и проинтегрируем правую и левую его части по x от 0 до некоторого $t < 1$:

$$\int_0^t (1+x+\ldots+x^{n-1})\,dx = \int_0^t \frac{dx}{1-x} - \int_0^t \frac{x^n}{1-x}\,dx.$$

Выполняя очевидные интегрирования, мы получаем

$$t+\frac{t^2}{2}+\ldots+\frac{t^n}{n} = -\ln(1-t) - \int_0^t \frac{x^n}{1-x}\,dx,$$

а применяя к последнему интегралу теорему о среднем,

$$t+\frac{t^2}{2}+\ldots+\frac{t^n}{n} = -\ln(1-t) - (x_n)^n \int_0^t \frac{dx}{1-x},$$

где $0 \leqq x_n \leqq t$ (ясно, что выносимое за знак интеграла значение переменной x должно, вообще говоря, зависеть от n; поэтому оно и обозначено через x_n).

Вычисление оставшегося интеграла дает нам

$$t+\frac{t_2}{2}+\ldots+\frac{t^n}{n} = -\ln(1-t) + (x_n)^n \ln(1-t). \quad (1.15)$$

Полученное неравенство справедливо для любого n, причем для каждого n число x_n не превосходит t, которое меньше единицы. Следовательно, $(x_n)^n \leqq t^n$. Поэтому, устремляя в равенстве (1.15) n к бесконечности, мы получим в пределе

$$t+\frac{t^2}{2}+\ldots+\frac{t^n}{n}+\ldots = -\ln(1-t).$$

Эта формула интересна и сама по себе, так как позволяет представить логарифмическую функцию в виде суммы натуральных степеней, взятых с надлежащими коэффициентами. Для нас сейчас, однако, эта формула представляет интерес главным образом по другой причине. Переписав ее в виде

$$\int_0^t dx + \int_0^t x\,dx + \ldots + \int_0^t x^{n-1}\,dx + \ldots = \int_0^t \frac{dx}{1-x},$$

мы можем сказать, что сумма интегралов всех членов бесконечной геометрической прогрессии (а точнее, *предел* сумм интегралов первых ее членов) равна интегралу от ее суммы. Разумеется, для того чтобы вся эта фраза имела смысл, необходимо, чтобы прогрессия во всей области интегрирования была равномерно сходящейся.

Подчеркнем, что это утверждение не является тривиальным следствием того, что «сумма интегралов от функций равна интегралу от их суммы», а было получено в результате определенных выкладок и ссылок на конкретные факты математического анализа.

§ 6. Почленное дифференцирование прогрессий

Снова напишем тождество (1.14)

$$1+x+x^2+\ldots+x^{n-1}=\frac{1}{1-x}-\frac{x^n}{1-x}$$

и на этот раз продифференцируем обе его части:

$$1+2x+\ldots+(n-1)\ x^{n-2}=\frac{1}{(1-x)^2}-\frac{nx^{n-1}(1-x)+x^n}{(1-x)^2}.$$

Полагая в этом тождестве $n\to\infty$, мы получаем

$$\lim_{n\to\infty}(1+2x+\ldots+(n-1)\,x^{n-2})=$$
$$=\frac{1}{(1-x)^2}-\frac{1}{1-x}\lim_{n\to\infty}nx^{n-1}-\frac{1}{(1-x)^2}\lim_{n\to\infty}x^n. \quad (1.16)$$

Слева под знаком предела стоит сумма, зависящая от n. При любом $0\leqq x<1$ она с ростом n возрастает и притом остается ограниченной сверху числом $\frac{1}{(1-x)^2}$. Следовательно, эта сумма имеет предел

$$\lim_{n\to\infty}(1+2x+\ldots+(n-1)\,x^{n-2})=$$
$$=1+2x+\ldots+(n-1)\,x^{n-2}+\ldots$$

Для вычисления первого из пределов в правой части (1.16) рассмотрим предел

$$\lim_{z\to\infty}zx^{z-1},$$

где z может принимать любые вещественные значения. Этот предел представляет собой неопределенность. Раскрывая ее по правилу Лопиталя (дифференцированием по z), мы получаем

$$\lim_{z\to\infty} zx^{z-1} = \lim_{z\to\infty} \frac{z}{x^{-z+1}} = \lim_{z\to\infty} \frac{1}{-x^{-z+1}\ln x} = \lim_{z\to\infty} \frac{-x^{z-1}}{\ln x} = 0.$$

Отсюда следует, что для любой неограниченно возрастающей последовательности значений z последовательность значений функции zx^{z-1} стремится к нулю. В частности, это имеет место и в том случае, когда z принимает целочисленные значения $n=1, 2, \ldots$ Таким образом,

$$\lim_{n\to\infty} nx^{n-1} = 0.$$

Наконец, второй предел в (1.16) справа, очевидно, также равен нулю.

Учитывая все сказанное, мы можем переписать равенство (1.16) как

$$1 + 2x + \ldots + (n-1)x^{n-2} + \ldots = \frac{1}{(1-x)^2}, \qquad (1.17)$$

или, иначе,

$$\frac{d1}{dx} + \frac{dx}{dx} + \frac{dx^2}{dx} + \ldots + \frac{dx^{n-1}}{dx} + \ldots = \frac{d}{dx}\frac{1}{1-x}.$$

Таким образом, сумма производных от членов геометрической прогрессии равна производной от суммы прогрессии.

Как и в предыдущем параграфе, установленный факт потребовал некоторых специальных рассуждений.

Формулы (1.15) и (1.17) показывают, что существуют функции, вид которых существенно отличается от многочлена, но которые можно представить в виде «бесконечной суммы» степеней переменной, взятых с теми или иными коэффициентами.

В главе 6 будет показано, что такому представлению поддаются весьма разнообразные функции.

§ 7. Прогрессии с комплексными членами

Перепишем тождество (1.14) в третий раз в несколько видоизмененной форме:

$$z-z^2+z^3-\ldots+(-1)^{n+1}z^n=\frac{z-(-1)^n z^{n+1}}{1+z}, \quad (1.18)$$

считая, что z есть комплексное число, по модулю равное единице и отличное от -1, т. е.

$$z=\cos\varphi+i\sin\varphi \qquad (-\pi<\varphi<\pi). \quad (1.19)$$

Из равенства (1.18) двух комплексных чисел следует равенство их вещественных частей. Но согласно формуле Муавра при любом $k=1, 2, \ldots$

$$z^k=\cos k\varphi+i\sin k\varphi,$$

и поэтому левая часть (1.18) есть

$$(\cos\varphi+i\sin\varphi)-(\cos 2\varphi+i\sin 2\varphi)+\ldots+$$
$$+(-1)^{n+1}(\cos n\varphi+i\sin n\varphi).$$

Следовательно, ее вещественная часть равна

$$\cos\varphi-\cos 2\varphi+\ldots+(-1)^{n+1}\cos n\varphi. \quad (1.20)$$

Найдем теперь вещественную часть *правой* части (1.18). Подставим для этого в правую часть (1.18) вместо z его выражение (1.19):

$$\frac{\cos\varphi+i\sin\varphi-(-1)^n(\cos(n+1)\varphi+i\sin(n+1)\varphi)}{1+\cos\varphi+i\sin\varphi}.$$

Умножив числитель и знаменатель этой дроби на выражение, сопряженное знаменателю, мы получим

$$\frac{(\cos\varphi+i\sin\varphi)(1+\cos\varphi-i\sin\varphi)}{(1+\cos\varphi+i\sin\varphi)(1+\cos\varphi-i\sin\varphi)}-$$
$$-\frac{(-1)^n(\cos(n+1)\varphi+i\sin(n+1)\varphi)(1+\cos\varphi-i\sin\varphi)}{(1+\cos\varphi+i\sin\varphi)(1+\cos\varphi-i\sin\varphi)}.$$

Вещественная часть числителя этой разности равна

$$\cos\varphi+\cos^2\varphi+\sin^2\varphi-(-1)^n(\cos(n+1)\varphi+$$
$$+\cos(n+1)\varphi\cos\varphi+\sin(n+1)\varphi\sin\varphi),$$

или (последние два слагаемых в скобках представляют собой косинус разности)

$$1+\cos\varphi-(-1)^n(\cos(n+1)\varphi+\cos n\varphi),$$

т. е., преобразуя сумму косинусов,

$$1+\cos\varphi-(-1)^n\,2\cos\frac{2n+1}{2}\varphi\cos\frac{\varphi}{2}.$$

Знаменатель дроби стал вещественным; он равен теперь

$$2+2\cos\varphi.$$

Следовательно, вещественная часть дроби равна

$$\frac{1}{2}-(-1)^n\frac{\cos\frac{2n+1}{2}\varphi\cos\frac{\varphi}{2}}{1+\cos\varphi}=\frac{1}{2}-(-1)^n\frac{\cos\frac{2n+1}{2}\varphi}{2\cos\frac{\varphi}{2}}.$$

Приравнивая это (1.20), мы получаем

$$\cos\varphi-\cos 2\varphi+\ldots+(-1)^{n+1}\cos n\varphi=$$
$$=\frac{1}{2}-(-1)^n\frac{\cos\frac{2n+1}{2}\varphi}{2\cos\frac{\varphi}{2}}.$$

Проинтегрируем полученное тождество по φ от нуля до некоторого t, $0\leqq t<\pi$:

$$\int_0^t\cos\varphi\,d\varphi-\int_0^t\cos 2\varphi\,d\varphi+\ldots+(-1)^{n+1}\int_0^t\cos n\varphi\,d\varphi=$$
$$=\int_0^t\frac{1}{2}\,d\varphi-(-1)^n\int_0^t\frac{\cos\frac{2n+1}{2}\varphi}{2\cos\frac{\varphi}{2}}\,d\varphi,$$

или, вычисляя интегралы (кроме последнего),

$$\sin t-\frac{1}{2}\sin 2t+\ldots+\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nt=$$
$$=\frac{1}{2}t-(-1)^n\int_0^t\frac{\cos\frac{2n+1}{2}\varphi}{2\cos\frac{\varphi}{2}}\,d\varphi. \qquad (1.21)$$

Возьмем оставшийся интеграл по частям, полагая

$$u=\frac{1}{\cos\frac{\varphi}{2}},\qquad dv=\cos\frac{2n+1}{2}\varphi d\varphi.$$

Это дает нам

$$\int_0^t \frac{\cos\frac{2n+1}{2}\varphi}{2\cos\frac{\varphi}{2}}d\varphi=$$

$$=\frac{1}{2n+1}\frac{\sin\frac{2n+1}{2}\varphi}{\cos\frac{\varphi}{2}}\Bigg|_0^t-\frac{1}{2n+1}\frac{1}{2}\int_0^t\frac{\sin\frac{2n+1}{2}\varphi\sin\frac{\varphi}{2}}{\cos^2\frac{\varphi}{2}}d\varphi=$$

$$=\frac{1}{2n+1}\left(\frac{\sin\frac{2n+1}{2}t}{\cos\frac{t}{2}}-\frac{1}{2}\int_0^t\frac{\sin\frac{2n+1}{2}\varphi\sin\frac{\varphi}{2}}{\cos^2\frac{\varphi}{2}}d\varphi\right).$$

Но первое слагаемое в скобках ограничено $\left(\text{ибо } t<\pi\right.$ и поэтому $\left.\cos\frac{t}{2}>0\right)$. Кроме того, учитывая, что $\cos\frac{\varphi}{2}$ убывает и принимает поэтому наименьшее свое значение при $\varphi=t$,

$$\left|\int_0^t\frac{\sin\frac{2n+1}{2}\varphi\sin\frac{\varphi}{2}}{\cos^2\frac{\varphi}{2}}d\varphi\right|\leq\int_0^t\frac{\left|\sin\frac{2n+1}{2}\varphi\sin\frac{\varphi}{2}\right|}{\cos^2\frac{\varphi}{2}}d\varphi\leq$$

$$\leq\frac{1}{\cos^2\frac{t}{2}}\int_0^t dt=\frac{t}{\cos^2\frac{t}{2}}.$$

Следовательно, и второе слагаемое в скобках ограничено.

Таким образом, интеграл в формуле (1.21) с ростом n стремится к нулю:

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^t\frac{\cos\frac{2n+1}{2}\varphi}{2\cos\frac{\varphi}{2}}d\varphi=0.$$

Переходя в равенстве (1.21) к пределу при $n \to \infty$ и учитывая только что установленное, мы получаем

$$\sin t - \frac{1}{2}\sin 2t + \frac{1}{3}\sin 3t - \ldots + \frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nt + \ldots = \frac{1}{2}t. \tag{1.22}$$

Итак, оказывается, что не только степенями можно описывать функции, совершенно непохожие на полиномы, но и «бесконечной суммой» синусов кратных дуг (разумеется, если эти синусы берутся с нужными коэффициентами) можно совершенно точно описать линейную функцию, которая на первый взгляд не имеет с тригонометрическими функциями ничего общего.

Формула (1.22) получена нами для любого $t \in [0, \pi)$. Из нечетности функций, стоящих в обеих ее частях, следует, что она верна и при $t \in (-\pi, 0]$, т. е. для любого $t \in (-\pi, \pi)$.

Заметим, что при $t = \pm\pi$ все проведенные рассуждения перестают быть справедливыми. Более того, сама окончательная формула (1.22) становится при этом неверной; действительно, при $t = \pm\pi$ все синусы в (1.22) обращаются в нуль, тогда как справа оказывается отличное от нуля число $\pm\frac{\pi}{2}$.

Обратим, однако, внимание на то обстоятельство, что при $t = \pm\pi$ левая часть (1.22) равна полусумме значений, которые правая часть принимает при $t = \pi$ и $t = -\pi$.

Как мы увидим далее (в главе 9), все перечисленные в этом параграфе факты являются проявлениями весьма общей закономерности.

* * *

В сущности, в этой главе мы, работая с прогрессиями, познакомились в общих чертах со всеми основными идеями курса теории рядов. Все дальнейшее будет лишь обобщением, уточнением и разработкой уже сказанного.

ГЛАВА 2

ЧИСЛОВЫЕ РЯДЫ. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ. ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕМЫ О СХОДИМОСТИ

§ 1. Сложение и его свойства

Как вещественные, так и комплексные числа можно, как известно, складывать в любом конечном числе. Это значит, что, каков бы ни был конечный набор чисел

$$u_1, u_2, \ldots, u_n,$$

существует число s_n, являющееся суммой всех чисел из этого набора:

$$s_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n.$$

Действие сложения чисел коммутативно (перестановочно) в том смысле, что «от перестановки слагаемых сумма не изменяется»:

$$u_1 + u_2 = u_2 + u_1,$$
$$u_1 + u_2 + u_3 + u_4 = u_3 + u_4 + u_2 + u_1$$

и т. д.

Кроме того, это действие удовлетворяет ассоциативному (сочетательному) закону, согласно которому для нахождения суммы нескольких слагаемых эти слагаемые можно объединить в группы, найти суммы слагаемых, составляющих каждую из этих групп, и все полученные суммы сложить. Например,

$$(((u_1 + u_2) + u_3) + u_4) + u_5 = u_1 + ((u_2 + u_3) + (u_4 + u_5)).$$

Отметим, наконец, еще дистрибутивный (распределительный) закон сложения по отношению к умножению:

$$c(u_1 + u_2 + \ldots + u_n) = cu_1 + cu_2 + \ldots + cu_n.$$

§ 2. Определение числового ряда и его сходимости

Пусть теперь

$$u_1,\ u_2,\ \ldots,\ u_n,\ \ldots \tag{2.1}$$

— *бесконечная* последовательность чисел, которые могут быть как вещественными, так и комплексными.

Определение. Выражение

$$u_1+u_2+\ldots+u_n+\ldots \tag{2.2}$$

называется *рядом* (в данном случае — *числовым рядом*), а элементы последовательности $u_1,\ u_2,\ \ldots,\ u_n,\ \ldots$ — *членами ряда*.

Иногда для обозначения ряда (2.2) применяют следующую запись:

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$$

(читается: сумма u_n по n от 1 до ∞).

Поскольку выражение (2.2) для ряда рассматривается как единое целое, для его задания необходимо задать каждый его член u_n. Обычно член ряда описывается как некоторая функция от своего номера. Аналитическое выражение этой функции часто называют «общим» членом ряда. Например, «общим» членом геометрической прогрессии $a,\ aq,\ aq^2,\ \ldots$ является aq^{n-1}.

Само по себе выражение (2.2) никакого определенного смысла не имеет, потому что действие сложения в своем непосредственном содержании имеет дело каждый раз лишь с конечным числом слагаемых. Этот смысл выражению (2.2) предстоит приписать нам самим. Очевидно, это следует сделать так, чтобы «бесконечная сумма» (2.2), с одной стороны, была бы «похожа» на обычные суммы, а с другой, — описывала бы на языке математического анализа те или иные реальные факты и помогала бы решать задачи. Из последней фразы видно, что в определении смысла выражения (2.2) содержится некоторый произвол: мы можем по-разному понимать сумму (2.2). Формулировки различных таких пониманий и сопоставления их друг с другом представляют большой интерес, как теоретический, так и практический. Мы, однако, в настоя-

щем курсе ограничимся рассмотрением только одной такой формулировки, пожалуй, наиболее естественной.

Определение. Сумма n первых членов ряда (2.2)

$$s_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n$$

называется *n-й частичной суммой* этого ряда.

Очевидно, первая, вторая, третья и т. д. частичные суммы ряда

$$s_1 = u_1,$$
$$s_2 = u_1 + u_2,$$
$$s_3 = u_1 + u_2 + u_3,$$
$$\cdots\cdots\cdots$$

составляют бесконечную последовательность.

Определение. Ряд (2.2) называется *сходящимся*, если последовательность $s_1, s_2, \ldots, s_n, \ldots$ его частичных сумм имеет конечный предел:

$$\lim_{n \to \infty} s_n = s.$$

Значение s этого предела называется *суммой ряда* (2.2).

Определение. Ряд (2.2) называется *расходящимся*, если последовательность его частичных сумм предела не имеет (в частности, если члены последовательности частичных сумм неограниченно возрастают по модулю).

Содержание теории числовых рядов состоит в установлении сходимости или расходимости тех или иных рядов и в вычислении сумм сходящихся рядов.

В принципе можно доказывать сходимость или расходимость каждого ряда, а также вычислять сумму сходящегося ряда, опираясь непосредственно на определения сходимости и суммы. Именно, в каждом случае можно попытаться составить аналитическое выражение для n-й частичной суммы ряда и найти предел этого выражения при возрастании n.

Примеры

1. Для ряда

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots + \frac{1}{2^n} + \ldots$$

n-я частичная сумма

$$s_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2^n} = 1 - \frac{1}{2^n},$$

и

$$s=\lim_{n\to\infty} s_n=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2^n}\right)=1,$$

так что этот ряд сходится, и сумма его равна 1.

2. Для ряда

$$1+2+3+\ldots+n+\ldots$$

n-я частичная сумма

$$s_n=1+2+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}.$$

Последовательность частичных сумм

$$s_1=1,\ s_2=3,\ s_3=6,\ \ldots,\ s_n=\frac{n(n+1)}{2},\ \ldots$$

очевидно, неограниченно возрастает, так что этот ряд расходится и о его сумме говорить нельзя.

3. Для ряда

$$1-1+1-1+\ldots$$

всякая частичная сумма s_k с четным номером n равна нулю, а всякая сумма с нечетным номером — единице.

Последовательность частичных сумм этого ряда

$$s_1=1,\ s_2=0,\ s_3=1,\ s_4=0,\ \ldots,$$

хотя и ограничена, но не имеет предела. Следовательно, этот ряд так же расходится и не имеет суммы. Его можно назвать *колеблющимся*. Подчеркнем, что 0 и 1 в последовательности частичных сумм встречаются бесконечное число раз; однако ни одно из этих чисел не является пределом этой последовательности и не может считаться суммой ряда.

Сделаем, однако, два замечания:

Во-первых, только что описанный «естественный» путь часто оказывается весьма неудобным из-за трудности явного вычисления частичных сумм ряда и нахождения предела их последовательности.

Во-вторых, нередко при исследовании рядов значения частичных сумм не представляют интереса и после решения задачи превращаются в «отходы производства». Более того, иногда не нужна даже сумма ряда, а все исследования ведутся лишь ради установления самого факта сходимости или расходимости ряда.

Ввиду сказанного представляют интерес методы анализа рядов, приводящие к их суммам непосредственно, минуя вычисление частичных сумм. Точно так же оказы-

ваются полезными приемы, позволяющие констатировать сходимость ряда без нахождения его суммы.

Например, если все члены ряда

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots$$

положительны, то последовательность его частичных сумм

$$s_1,\ s_2,\ \ldots,\ s_n,\ \ldots$$

является возрастающей. Поэтому для существования у этой последовательности предела, и тем самым для сходимости ряда, необходимо и достаточно, чтобы все частичные суммы были ограничены в совокупности, т. е. чтобы нашлось такое число M, что $s_n < M$ при любом n.

Приемам и методам такого рода посвящена значительная часть данного курса.

§ 3. Остаток ряда

Пусть дан ряд

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots \tag{2.3}$$

Определение. Ряд

$$u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots$$

называется *n-м остатком* ряда (2.3).

Очевидно, m-я частичная сумма n-го остатка ряда равна разности $s_{n+m} - s_n$ частичных сумм самого ряда. Кроме того, мы имеем

$$s_{n+m} = s_n + (s_{n+m} - s_n),$$

откуда, переходя к пределу по m при $m \to \infty$,

$$\lim_{m \to \infty} s_{n+m} = s_n + \lim_{m \to \infty} (s_{n+m} - s_n). \tag{2.4}$$

Предел слева есть сумма s исходного ряда, а предел справа — сумма r_n его n-го остатка. Ясно, что из существования предела в левой части равенства следует существование другого предела в правой его части и наоборот. Поэтому если сходится один из остатков ряда, то сходится и сам ряд. Точно так же из сходимости ряда следует сходимость каждого его остатка.

Из формулы (2.4) видно, что частичная сумма сходящегося ряда отличается от его суммы на величину суммы остатка. Поэтому чем меньше сумма остатка ряда, тем точнее описывает соответствующая частичная сумма ряда сумму всего ряда.

Теорема. *Если ряд (2.3) сходится, то сумма r_n его n-го остатка с ростом n стремится к нулю.*

Доказательство. Мы видели, что

$$s = s_n + r_n.$$

Так как это равенство справедливо для любого n, мы можем перейти в нем по n к пределу:

$$s = \lim_{n \to \infty} (s_n + r_n) = \lim_{n \to \infty} s_n + \lim_{n \to \infty} r_n.$$

Но для сходящегося ряда

$$\lim_{n \to \infty} s_n = s,$$

откуда следует, что

$$\lim_{n \to \infty} r_n = 0.$$

§ 4. Принцип сходимости Коши

Напомним одну важную, но довольно деликатную теорему из теории пределов, называемую принципом сходимости Коши.

Теорема. *Если*

$$s_1,\ s_2, \ldots,\ s_n, \ldots \tag{2.5}$$

— некоторая числовая последовательность, то для того, чтобы она сходилась к некоторому конечному пределу s, необходимо и достаточно, чтобы по любому $\varepsilon > 0$ нашлось такое n, что для любого $m \geqq 0$

$$|s_{n+m} - s_n| < \varepsilon. \tag{2.6}$$

Доказательство. Необходимость доказывается совсем просто. В самом деле, пусть последовательность (2.5) имеет конечный предел s. Это, в частности, означает, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое n,

что

$$|s_n - s| < \frac{\varepsilon}{2}, \tag{2.7}$$

и при любом большем номере, чем n, т. е. при любом номере вида $n+m$, это неравенство также будет иметь место:

$$|s_{n+m} - s| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{2.8}$$

Складывая (2.7) и (2.8), мы получаем

$$\varepsilon > |s_{n+m} - s| + |s_n - s| \geqq |s_{n+m} - s - s_n + s| = |s_{n+m} - s_n|,$$

т. е. требуемое неравенство (2.6).

Достаточность оказывается фактом, существенно более сложным (доказательство проводится здесь для случая вещественной последовательности; доказательство в комплексном случае отличается лишь малосущественными деталями).

Пусть по любому $\varepsilon > 0$ найдется такое n, что для всех m выполняется неравенство (2.6). Это значит, что все члены последовательности (2.5), за исключением, быть может, тех, которые предшествуют s_n, попадут в сегмент

$$[s_n - \varepsilon,\ s_n + \varepsilon]. \tag{2.9}$$

Значит, последовательность (2.5) оказывается ограниченной. Поэтому в ней найдется подпоследовательность, сходящаяся к некоторому пределу s.

В целях полноты изложения приведем доказательство этого факта.

Обозначим сегмент (2.9) через $[A_0, B_0]$. Он содержит бесконечно много членов последовательности (2.5). Разобьем этот сегмент на две половины:

$$\left[A_0,\ \frac{1}{2}(A_0+B_0)\right] \quad \text{и} \quad \left[\frac{1}{2}(A_0+B_0),\ B_0\right],$$

выберем ту из них, в которой окажется бесконечно много членов последовательности (2.5), обозначим ее через $[A_1, B_1]$ и снова разделим пополам. Будем продолжать такой процесс деления отрезка пополам и выбора половины, содержащей бесконечное число членов последовательности (2.5), неопределенно долго.

В результате мы получим бесконечную последовательность вложенных друг в друга сегментов

$$[A_0, B_0], [A_1, B_1], [A_2, B_2], \ldots \qquad (*)$$

Каждый из этих сегментов содержит бесконечно много членов последовательности (2.5). Поэтому из каждого сегмента $[A_k, B_k]$ можно выбрать член последовательности s_{n_k} так, чтобы все выбираемые члены были различными.

Очевидно,

$$A_0 \leqq A_1 \leqq \ldots < B_0.$$

Значит, последовательность чисел

$$A_0, A_1, A_2 \ldots$$

монотонно неубывающая и ограничена сверху. Поэтому она имеет предел $\lim_{k\to\infty} A_k$. По аналогичным причинам существует предел $\lim_{k\to\infty} B_k$. Далее, очевидно,

$$\lim_{k\to\infty} B_k - \lim_{k\to\infty} A_k = \lim_{k\to\infty} (B_k - A_k) = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{2^{k-1}} (B_0 - A_0) = 0,$$

т. е.

$$\lim_{k\to\infty} A_k = \lim_{k\to\infty} B_k.$$

Обозначим этот общий предел через s.

Наконец, по выбору s_{n_k} для любого $k = 0, 1, 2, \ldots$

$$A_k \leqq s_{n_k} \leqq B_k.$$

При неограниченном возрастании k крайние члены этого неравенства стремятся к общему пределу s. Следовательно, $\lim_{k\to\infty} s_{n_k}$ также существует и равен s

Допустим теперь, что в последовательности (2.5) найдутся *две* подпоследовательности,

$$s_{n'_1}, s_{n'_2}, \ldots,$$
$$s_{n''_1}, s_{n''_2}, \ldots,$$

сходящиеся к *различным* пределам s' и s''.

Возьмем

$$\varepsilon < \frac{1}{4} |s' - s''|$$

и найдем на основании условия теоремы такое n, что при всех m

$$|s_{n+m} - s_n| < \varepsilon. \qquad (2.10)$$

Кроме того, найдем на основании определения предела такие $n'_{k'}$ и $n''_{k''}$, что при любом $n'_k > n'_{k'}$

$$\left| s' - s_{n'_k} \right| < \varepsilon,$$

а при любом $n''_k > n''_{k''}$

$$\left| s'' - s_{n''_k} \right| < \varepsilon.$$

Эти неравенства справедливы при всех достаточно больших номерах n'_k и n''_k. Поэтому среди этих номеров найдутся и такие, которые более, чем n. Возьмем $n'_k = n + m'$ и $n''_k = n + m''$. Мы имеем

$$|s' - s_{n+m'}| < \varepsilon,$$
$$|s'' - s_{n+m''}| < \varepsilon.$$

Кроме того, полагая в (2.10) $m = m'$ и $m = m''$, мы получаем

$$|s_{n+m'} - s_n| < \varepsilon,$$
$$|s_{n+m''} - s_n| < \varepsilon.$$

Объединение последних четырех неравенств дает нам

$$|s' - s''| \leqq |s' - s_{n+m'}| + |s_{n+m'} - s_n| + |s_n - s_{n+m''}| + \\ + |s_{n+m'} - s''| < 4\varepsilon,$$

что противоречит предположенному.

§ 5. Критерий Коши сходимости рядов

Применим доказанную теорему к теории рядов, считая последовательность (2.5) последовательностью частичных сумм ряда.

Теорема. *Для того чтобы ряд*

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots$$

сходился, необходимо и достаточно, чтобы последовательность его частичных сумм

$$s_1, \; s_2, \; \ldots, \; s_n, \; \ldots$$

обладала следующим свойством: каково бы ни было $\varepsilon > 0$, *существует такое* n, *что при любом* $m \geqq 0$

$$|s_{n+m} - s_n| < \varepsilon.$$

Доказательство сводится к уяснению того, что сходимость ряда есть по определению сходимость последовательности его частичных сумм, и к применению к последовательности частичных сумм только что доказанного принципа сходимости Коши.

Эту теорему можно переформулировать следующим, быть может, несколько более наглядным образом: для сходимости ряда необходимо и достаточно, чтобы по любому $\varepsilon > 0$ нашлось такое n, что сумма любого числа членов ряда, начиная с n-го, была меньше ε. Таким образом, сходимость ряда означает, что сколь угодно «длинные» суммы его последовательных членов должны быть малыми, если только они состоят из «достаточно далеких» членов ряда.

§ 6. Необходимый признак сходимости ряда

Близким к критерию Коши, хотя и несравненно более простым, является следующий необходимый признак сходимости ряда

Для того чтобы ряд

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots \tag{2.11}$$

сходился, необходимо, чтобы

$$\lim_{n \to \infty} u_n = 0. \tag{2.12}$$

Действительно, из сходимости ряда (2.11) следует, что

$$\lim_{n \to \infty} s_n = \lim_{n \to \infty} s_{n-1} = s.$$

Но вместе с тем

$$\lim_{n \to \infty} s_n = \lim_{n \to \infty} (s_{n-1} + u_n) = \lim_{n \to \infty} s_{n-1} + \lim_{n \to \infty} u_n,$$

т. е.

$$s = s + \lim_{n \to \infty} u_n,$$

откуда и следует (2.12).

Пример. Ряд

$$1+\frac{3}{4}+\frac{5}{8}+\ldots+\frac{2^{n-1}+1}{2^n}+\ldots$$

расходится, потому что для него

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{n-1}+1}{2^n} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^n}\right)=\frac{1}{2}>0.$$

Выведенный признак сходимости является необходимым, но не достаточным: в дальнейшем мы познакомимся с многочисленными рядами, для которых $\lim\limits_{n\to\infty} u_n=0$, но которые тем не менее расходятся.

§ 7. Желательность систематической теории

В принципе мы могли бы при изучении сходимости числовых рядов ограничиться сказанным и исследовать каждый ряд с точки зрения критерия Коши. Однако тогда, приступая к изучению какого-нибудь нового ряда, мы вынуждены были бы каждый раз начинать «с пустого места». Наши возможности ограничивались бы при этом использованием индивидуальных особенностей каждого из изучаемых рядов, и вместо теории мы имели бы просто коллекцию разрозненных задач. Несколько шагов по этому пути было сделано в главе 1, посвященной прогрессиям. Но то, что оказалось пригодно для иллюстративных целей, совершенно нетерпимо при систематическом построении математической теории.

Поэтому мы сейчас займемся не столько установлением сходимостей или расходимостей отдельных рядов, сколько выяснением связей между поведением одних рядов и поведением других; мы будем учиться использовать сведения, полученные в результате анализа одного ряда, для упрощения исследования других рядов.

Выполняя эту программу, начнем с доказательства нескольких простых теорем, которые, по существу, являются непосредственным перенесением простейших теорем о пределах на последовательности частичных сумм рядов.

§ 8. Свойства сходящихся рядов, подобные свойствам сумм

Теорема 1 (ассоциативный закон для сходящихся рядов). *Если в сходящемся ряде*

$$u_1+u_2+\ldots+u_n+\ldots \qquad (2.13)$$

произвольно объединить соседние члены в группы, не нарушая порядка членов:

$$(u_1+\ldots+u_{n_1})+(u_{n_1+1}+\ldots+u_{n_2})+$$
$$+(u_{n_2+1}+\ldots+u_{n_3})+\ldots$$

(*разумеется, каждый член при этом должен входить только в одну группу*) *и найти суммы* v_1, v_2, $v_3, \ldots$ *членов, входящих в каждую из групп, то составленный из этих сумм ряд*

$$v_1+v_2+v_3+\ldots \qquad (2.14)$$

будет сходиться и иметь ту же сумму, что и первоначальный ряд (2.13).

Доказательство. Составим последовательность частичных сумм ряда (2.13):

$$s_1=u_1,$$
$$s_2=u_1+u_2,$$
$$s_3=u_1+u_2+u_3,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Среди них, в частности, окажутся и все суммы вида

$$s_{n_1}=u_1+\ldots+u_{n_1}=v_1,$$
$$s_{n_2}=u_1+\ldots+u_{n_1}+u_{n_1+1}+\ldots+u_{n_2}=v_1+v_2,$$
$$s_{n_3}=u_1+\ldots+u_{n_1}+u_{n_1+1}+\ldots+u_{n_2}+u_{n_2+1}+\ldots+u_{n_3}=$$
$$=v_1+v_2+v_3,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

т. е. все частичные суммы ряда (2.14). Таким образом, последовательность частичных сумм ряда (2.14) оказывается подпоследовательностью последовательности

частичных сумм ряда (2.13). Но раз последовательность

$$s_1,\ s_2,\ s_3,\ \ldots \tag{2.15}$$

по условию сходится и имеет предел s, ее подпоследовательность

$$s_{n_1},\ s_{n_2},\ s_{n_3},\ \ldots \tag{2.16}$$

также должна сходиться и иметь тот же предел. Это и означает, что «сконцентрированный» ряд (2.14) сходится и имеет ту же сумму, что и «редкий» ряд (2.13).

Следствие. *Если в результате описанного в условии предыдущей теоремы объединения мы получим ряд* (2.14), *который расходится, то и первоначально взятый ряд* (2.13) *также расходится.*

В самом деле, если бы ряд (2.13) сходился, то сходился бы и ряд (2.14), а мы предположили обратное.

Пример. Выясним сходимость и найдем сумму ряда

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}+\ldots \tag{2.17}$$

Замечая, что при любом $n=1,\ 2,\ \ldots$

$$\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1},$$

рассмотрим ряд

$$\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots \tag{2.18}$$

Очевидно, для этого ряда

$$s_1=1,$$

$$s_2=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2},$$

$$s_3=s_2+u_3=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1,$$

$$s_4=s_3+u_4=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3},$$

. . . .

Вообще для n четного: $n=2k$

$$s_{2k}=1-\frac{1}{k+1},$$

а для n нечетного: $n=2k+1$

$$s_{2k+1}=1.$$

Совершенно ясно, что

$$\lim_{n\to\infty} s_n=1,$$

так что ряд (2.18) сходится. Но тогда по доказанной теореме сходится и ряд (2.17), получаемый попарным объединением членов ряда (2.18), и сумма этого ряда также равна 1.

Замечание. Подчеркнем, что из сходимости «сконцентрированного» ряда (2.14) сходимость «редкого» ряда (2.13) может и не следовать, как и вообще на основании сходимости одной какой-либо подпоследовательности еще нельзя утверждать о сходимости всей последовательности.

Пример. Если в ряде

$$1-\frac{1}{2}+1-\frac{5}{6}+\ldots+1-\frac{n(n+1)-1}{n(n+1)}+\ldots \qquad (2.19)$$

объединить попарно соседние члены:

$$\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(1-\frac{5}{6}\right)+\ldots+\left(1-\frac{n(n+1)-1}{n(n+1)}\right)+\ldots,$$

то мы получим ряд

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}+\ldots,$$

сходимость которого была установлена в предыдущем примере.

Однако исходный ряд не сходится, потому что для него, как легко проверить,

$$s_{2n-1}=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{(n-1)n}+1,$$

$$s_{2n}=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{(n-1)n}+\frac{1}{n(n+1)},$$

так что

$$\lim_{n\to\infty} s_{2n-1}=2,$$
$$\lim_{n\to\infty} s_{2n}=1.$$

К такому же выводу приводит рассмотрение уже встречавшегося нам ряда

$$1-1+1-1+\ldots$$

Вместе с тем, если все члены исходного ряда положительны, то обращение теоремы остается в силе: из сходимости ряда (2.14) следует сходимость ряда (2.13). Действительно, для ряда с положительными членами последовательность (2.15) является монотонной и неубывающей. Поэтому она должна сходиться, если сходится какая-либо ее подпоследовательность, например (2.16).

Теорема 2 (дистрибутивный закон для рядов; теорема об умножении ряда на число). *Пусть*

$$u_1+u_2+\ldots+u_n+\ldots \tag{2.20}$$

— некоторый ряд, а c — произвольное число, отличное от нуля. Тогда ряд

$$cu_1+cu_2+\ldots+cu_n+\ldots \tag{2.21}$$

сходится тогда и только тогда, когда сходится ряд (2.20). *Если ряд* (2.20) *сходится, и сумма его равна s, то сумма ряда* (2.21) *равна cs.*

Доказательство. Если последовательность частичных сумм ряда (2.20) есть

$$s_1, s_2, \ldots, s_n, \ldots,$$

то последовательностью частичных сумм ряда (2.21), очевидно, будет

$$cs_1, cs_2, \ldots, cs_n, \ldots$$

Так как

$$c\lim_{n\to\infty} c_n=\lim_{n\to\infty} cs_n, \tag{2.22}$$

из существования предела слева (которое означает сходимость ряда (2.20) при $c\neq 0$) следует существование предела справа (т. е. сходимость ряда (2.21)) и равенство (2.22). Наоборот, из существования предела

справа следуют существование предела слева и опять-таки равенство (2.22).

Замечание 1. Если в формулировке теоремы допустить случай $c=0$, то ряд (2.21) будет в этом случае сходиться всегда, и никакой информации из этого факта нам извлечь не удастся.

Замечание 2. Мы доказали теоремы о рядах, аналогичные свойствам ассоциативности и дистрибутивности конечных сумм. Теорема о возможности переставлять в ряде члены, аналогичная коммутативности сложения, носит более узкий характер и справедлива уже не для всех рядов.

Пример. Рассмотрим ряд

$$1-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-$$
$$-\underbrace{\frac{1}{8}-\ldots-\frac{1}{8}}_{8\ \text{членов}}+\underbrace{\frac{1}{16}+\ldots+\frac{1}{16}}_{16\ \text{членов}}-\frac{1}{32}-\ldots \quad (2.23)$$

В этом ряде видны чередующиеся группы равных друг другу положительных и отрицательных членов. Сумма членов в каждой группе по модулю равна единице.

Если суммировать члены ряда (2.23) в том порядке, в каком они написаны, то при завершении каждой группы положительных членов частичная сумма будет равна единице, а при завершении каждой группы отрицательных членов — нулю. Следовательно, этот ряд расходится, хотя все его частичные суммы ограничены (они лежат между нулем и единицей).

Переставим теперь члены ряда (2.23) следующим образом:

$$1-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}-\frac{1}{8}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}-\frac{1}{8}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}-\frac{1}{8}+$$
$$+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}-\frac{1}{8}+\frac{1}{16}-\frac{1}{32}-\frac{1}{32}+\ldots \quad (2.24)$$

(т. е. после каждого положительного члена будем писать по два отрицательных из следующей группы). Частичные суммы получающегося при этом ряда выглядят достаточно просто:

$$s_{3n}=0,$$
$$s_{3n+1}=\frac{1}{2^k},$$
$$s_{3n+2}=\frac{1}{2^{k+1}},$$

где k — некоторое целое число, зависящее от n и неограниченно возрастающее вместе с ростом n. Поэтому

$$\lim_{n\to\infty} s_n = 0,$$

так что ряд (2.24) сходится.

Наконец, переставив члены исходного ряда иначе:

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{2}+\underbrace{\frac{1}{16}+\ldots+\frac{1}{16}}_{16\ \text{членов}}-\frac{1}{8}+\frac{1}{64}+\ldots \tag{2.25}$$

(т. е. после k-й по порядку группы положительных членов ставится k-й по порядку отрицательный член; так как и групп положительных членов и отрицательных членов бесконечно много, можно считать, что их «одинаково много» и на каждый отрицательный член найдется целая группа положительных членов).

Объединим теперь группы положительных членов вместе со следующим за ним отрицательным членом в один член нового ряда. Каждый член нового ряда будет не меньшим, чем 1/2; поэтому его n-я частичная сумма s_n будет не меньше, чем $n/2$. Следовательно,

$$\lim_{n\to\infty} s_n \geqq \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2} = +\infty,$$

т. е. этот ряд расходится. Значит, на основании следствия теоремы 1 (об ассоциативном законе) ряд (2.25) также расходится.

Вместе с тем в рядах с положительными членами произвольная перестановка членов не нарушает сходимости рядов и не изменяет суммы сходящихся рядов.

Теорема 3 (Дирихле). *Пусть дан ряд*

$$u_1+u_2+\ldots+u_n+\ldots \tag{2.26}$$

с неотрицательными членами, а ряд

$$v_1+v_2+\ldots+v_n+\ldots \tag{2.27}$$

получается из ряда (2.26) *произвольной перестановкой его членов.*

Тогда если ряд (2.26) *сходится, то ряд* (2.27) *также сходится и имеет ту же сумму, что и ряд* (2.26)

Доказательство. Рассмотрим частичную сумму ряда (2.27)

$$t_n = v_1+v_2+\ldots+v_n.$$

Каждое из слагаемых этой суммы входит в ряд (2.26). Возьмем в ряде (2.26) столь большое число m первых членов, чтобы среди них оказались все слагаемые t_n, и составим m-ю частичную сумму ряда (2.26):

$$s_m = u_1 + u_2 + \ldots + u_m.$$

Так как все слагаемые t_n входят в s_m, а остальные слагаемые s_m (если такие есть) неотрицательны, должно быть

$$t_n \leqq s_m.$$

Но частичные суммы ряда (2.26), ввиду неотрицательности членов ряда, не превосходят его суммы s:

$$s_m \leqq s.$$

Следовательно,

$$t_n \leqq s.$$

Так как это неравенство справедливо для любого n, все частичные суммы ряда (2.27) ограничены. Поэтому ряд (2.27) сходится и

$$t = \lim_{n \to \infty} t_n \leqq s.$$

Так как теперь в наших рассуждениях ряды (2.26) и (2.27) стали равноправными, должно быть и

$$s \leqq t,$$

откуда следует, что $s = t$.

Теорема 4 (теорема о сложении рядов). *Пусть*

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots$$

и

$$v_1 + v_2 + \ldots + v_n + \ldots$$

— два сходящихся ряда соответственно с суммами s и t. Тогда ряд

$$(u_1 + v_1) + (u_2 + v_2) + \ldots + (u_n + v_n) + \ldots \qquad (2.2)$$

также сходится и сумма его равна $s + t$.

Доказательство. Для частичных сумм z_n ряда (2.28) мы имеем

$$z_n = (u_1 + v_1) + \ldots + (u_n + v_n) = \\ = (u_1 + \ldots + u_n) + (v_1 + \ldots + v_n).$$

Справа в скобках стоят частичные суммы s_n и t_n рассматриваемых рядов. Устремляя n к бесконечности, мы получаем

$$\lim_{n\to\infty} z_n = \lim_{n\to\infty} (s_n + t_n) = \lim_{n\to\infty} s_n + \lim_{n\to\infty} t_n = s + t,$$

а это и требовалось.

Доказанная теорема означает, что сходящиеся ряды можно почленно складывать и при этом складываются их суммы.

Теорема 5. *Если*

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots \qquad (2.29)$$

и

$$v_1 + v_2 + \ldots + v_n + \ldots \qquad (2.30)$$

— два сходящихся ряда соответственно с суммами s и t, а a и b — произвольные числа, то ряд

$$(au_1 + bv_1) + (au_2 + bv_2) + \ldots + (au_n + bv_n) + \ldots \qquad (2.31)$$

также сходится и сумма его равна $as + bt$.

Доказательство. Если $a = 0$, то ряд (2.31) превращается в (2.30); если $b = 0$, то ряд (2.31) превращается в (2.29), и теорема доказана. Предположим теперь, что $a \neq 0$ и $b \neq 0$. Тогда по теореме 2 сходятся ряды

$$au_1 + au_2 + \ldots + au_n + \ldots$$

и

$$bv_1 + bv_2 + \ldots + bv_n + \ldots,$$

а по теореме 4 — ряд (2.31).

Следствие (теорема о вычитании рядов). *Если сходятся ряды*

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots$$

и

$$v_1 + v_2 + \ldots + v_n + \ldots$$

и имеют суммы s и t, то сходится ряд

$$(u_1 - v_1) + (u_2 - v_2) + \ldots + (u_n - v_n) + \ldots$$

и сумма его равна $s - t$.

В самом деле, полагая в предыдущей теореме $a = 1$, а $b = -1$, мы получаем требуемое.

§ 9. Дальнейшие свойства рядов

Пусть нам дана некоторая сумма чисел, насчитывающая конечное число слагаемых:

$$u_1+u_2+\ldots+u_k. \tag{2.32}$$

Приписав к этой сумме бесконечный «хвост» из нулей, мы получим ряд

$$u_1+u_2+\ldots+u_k+0+0+\ldots+0+\ldots \tag{2.33}$$

Очевидно, для этого ряда

$$s_k=u_1+\ldots+u_k,$$
$$s_{k+1}=s_k+0=s_k,$$
$$s_{k+2}=s_{k+1}+0=s_{k+1}=s_k,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Значит,

$$\lim_{n\to\infty} s_n=s_k.$$

Поэтому ряд (2.33) сходится и сумма его равна s_k, т. е. сумме (2.32).

На основании сказанного мы можем сделать важное замечание. Всякая сумма является частным случаем сходящегося ряда. Поэтому все утверждения, справедливые для сходящихся рядов, остаются в силе и для конечных сумм.

Несколько более общий факт мы оформим в виде теоремы.

Теорема 1. *Присоединим к числу членов некоторого ряда в качестве новых членов произвольное (может быть, бесконечное) количество нулей, разместив их между старыми членами ряда произвольным образом. В этом случае новый ряд будет сходиться тогда и только тогда, когда сходится старый ряд, и сумма нового ряда будет равна сумме старого.*

Доказательство. Пусть

$$u_1+u_2+\ldots+u_n+\ldots$$

— новый ряд. Для него, как и для всякого ряда,

$$s_{n+1}=s_n+u_{n+1}.$$

Если $u_{n+i}=0$, то $s_{n+i}=s_n$. Поэтому последовательность частичных сумм нового ряда будет отличаться от последовательности частичных сумм старого ряда лишь повторениями некоторых сумм по нескольку раз. Очевидно, повторения членов последовательности не сказываются ни на ее сходимости, ни на ее пределе, что и доказывает теорему.

Теорема 2. *Если в ряд вписать на любых местах конечное число новых членов, то сходимость ряда не изменится, т. е. сходящийся ряд останется сходящимся, а расходящийся — расходящимся. Если первоначальный ряд был сходящимся, то сумма нового ряда получается из суммы старого увеличением ее на сумму вписанных членов.*

Доказательство. Пусть

$$u_1+u_2+\ldots+u_n+\ldots$$

— наш исходный ряд. В те места, в которые по условию теоремы надлежит вписать новые члены, впишем пока нули. По предыдущей теореме от такой операции не изменяется ни сходимость ряда, ни его сумма. Пусть

$$v_1+v_2+\ldots+v_n+\ldots \tag{2.34}$$

— получившийся при этом ряд.

Составим теперь еще один ряд

$$w_1+w_2+\ldots+w_n+\ldots, \tag{2.35}$$

в котором на тех номерах, на которых в (2.34) стоят «старые» члены, находятся нули, а на тех местах, где в (2.34) стоят вписанные нули, расположены в надлежащем порядке «новые» члены. Сумма ряда (2.35), очевидно, равна сумме «новых» членов.

На основании теоремы о сложении рядов (теорема 4 § 8) ряд

$$(v_1+w_1)+(v_2+w_2)+\ldots+(v_n+w_n)+\ldots \tag{2.36}$$

сходится вместе с рядом (2.34), и сумма его получается сложением суммы ряда (2.34) и ряда (2.35).

Нам остается заметить, что (2.36) и есть тот самый ряд, который получается путем вписывания в исходный ряд новых членов [1]).

Следствие. *Если из ряда выбросить конечное число его членов, то его сходимость не нарушится; если исходный ряд сходящийся, то сумма полученного ряда будет меньше суммы первоначального ряда на сумму выброшенных членов.*

Замечание. О сходимости ряда судят по его членам. Однако, как было только что выяснено, сходимость ряда не зависит от любого конечного числа членов ряда. Поэтому для установления сходимости (или расходимости) ряда не обязательно учитывать все его члены. Достаточно ограничиться членами, «начиная с некоторого места» или «начиная с некоторого номера *n*». Этим обстоятельством мы будем часто пользоваться в дальнейшем.

---

[1]) Более непосредственное (хотя едва ли более простое) доказательство этого же утверждения основано на том соображении, что в ряде (2.34), начиная с некоторого места, будут встречаться только «старые» члены. Воспроизведение этого доказательства во всех деталях будет для читателя полезным упражнением.

ГЛАВА 3

РЯДЫ С ПОЛОЖИТЕЛЬНЫМИ ЧЛЕНАМИ

§ 1. Признаки сходимости рядов

Существует довольно много приемов, позволяющих устанавливать сходимость или расходимость рядов. Все эти приемы называются *признаками сходимости*. В настоящее время известно большое число различных признаков сходимости рядов. С некоторыми из них мы уже успели познакомиться. Так, например, сходимость ряда можно установить, составив последовательность его частичных сумм и выяснив, имеет ли эта последовательность конечный предел. Этот прием, очевидно, является необходимым и достаточным признаком сходимости рядов. Другим необходимым и достаточным признаком сходимости является критерий Коши (см. § 5 главы 2). Стремление к нулю члена ряда по мере роста его номера также является признаком сходимости ряда, уже только необходимым, но не достаточным (см. § 6 главы 2).

К числу признаков сходимости можно отнести также всякого рода теоремы, позволяющие сводить выяснение вопроса о сходимости некоторого данного ряда к аналогичному вопросу о другом ряде, который устроен более просто или хотя бы более знакомый.

Эти теоремы обычно состоят в сравнении членов исследуемого ряда с членами другого ряда, поведение которого уже выяснено. Поэтому они называются *признаками сравнения*. По существу, все рассматриваемые в этой главе признаки сходимости являются такими признаками сравнения. В некоторых из них производится сравнение исследуемого ряда с некоторыми стандартными рядами (например, с геометрическими прогрессиями).

В этих случаях «сравнительная» природа признака внешне затушевывается, но, разумеется, не пропадает.

Подчеркнем, что в данной главе будут рассматриваться только ряды с положительными членами. Это обстоятельство каждый раз специально оговариваться не будет.

§ 2. Признаки сравнения

Поскольку в ряде с положительными членами величина одних членов не может быть скомпенсирована другими, противоположного знака, сходимость таких рядов особенно заметно зависит от величины их членов.

Теорема 1 (первый признак сравнения). *Пусть*

$$u_1+u_2+\ldots+u_n+\ldots \tag{3.1}$$

и

$$v_1+v_2+\ldots+v_n+\ldots \tag{3.2}$$

— два ряда, причем члены первого, начиная с некоторого места, не превосходят соответствующих членов второго:

$$u_n \leqq v_n, \quad n=k,\ k+1,\ \ldots \tag{3.3}$$

Тогда из сходимости ряда (3.2) *следует сходимость ряда* (3.1), *а из расходимости ряда* (3.1) *следует расходимость ряда* (3.2).

Доказательство. Так как отбрасывание конечного числа членов ряда не влияет на сходимость ряда, достаточно доказать теорему для случая, когда $k=1$. Пусть

$$s_1,\ s_2,\ \ldots,\ s_n,\ \ldots \quad \text{и} \quad t_1,\ t_2,\ \ldots,\ t_n,\ \ldots$$

— последовательности частичных сумм рядов (3.1) и (3.2). Из (3.3) следует, что

$$s_n \leqq t_n \text{ при любом } n=1,\ 2,\ \ldots \tag{3.4}$$

Пусть ряд (3.2) сходится и t — его сумма. Из положительности членов ряда (3.2) следует, что $s_n \leqq t$ при любом n. Это значит, что частичные суммы ряда (3.1) в совокупности ограничены, и поэтому сам ряд (3.1) сходится. Обозначим его сумму через s. Переходя в неравенстве (3.4) по n к пределу при $n \to \infty$, мы получаем

$$\lim_{n\to\infty} s_n \leqq \lim_{n\to\infty} t_n$$

(ввиду сходимости обоих рядов оба написанных предела существуют), т. е. $s \leq t$.

Пусть теперь ряд (3.1) расходится. Это значит, что его частичные суммы неограниченно возрастают. Но тогда, в силу (3.4), должны неограниченно возрастать и частичные суммы ряда (3.2), который тем самым расходится.

Примеры.

1. Рассмотрим ряд

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}+\ldots \tag{3.5}$$

(мы будем в дальнейшем называть его рядом «обратных квадратов»). Отбросив первый член этого ряда (что, как известно, не сказывается на его сходимости), сравним его с рядом

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{n\,(n+1)}+\ldots,$$

сходимость которого нами уже была установлена. Мы видим, что

$$\frac{1}{(n+1)^2}<\frac{1}{n\,(n+1)}.$$

Следовательно, и ряд (3.5) сходится. Как будет видно далее (см. § 11 главы 9), сумма этого ряда равна $\frac{\pi^2}{6}$.

2. Рассмотрим ряд

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots,$$

который обычно называется *гармоническим*.

Заменим в гармоническом ряде третий и четвертый члены на $^1/_4$ каждый, следующие 4 члена — на $^1/_8$ каждый; следующие 8 — на $^1/_{16}$ и т. д. В результате мы получим ряд 12

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+ \\ +\underbrace{\frac{1}{16}+\ldots+\frac{1}{16}}_{8\ \text{членов}}+\underbrace{\frac{1}{32}+\ldots+\frac{1}{32}}_{16\ \text{членов}}+\ldots \tag{3.6}$$

Члены этого ряда не превосходят соответствующих членов гармонического ряда. Поэтому для доказательства расходимости гармонического ряда достаточно установить расходимость ряда (3.6). Чтобы сделать это, объединим группы одинаковых членов ряда

(3.6) в один член нового ряда. Так как каждая k-я группа насчитывает 2^{k-2} членов, а каждый член ее равен $\frac{1}{2^{k-1}}$, сумма членов в каждой группе равна $1/2$. Новый ряд получается таким:

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\ldots$$

и, очевидно, расходится. Таким образом, по следствию теоремы 1 § 8 главы 2 расходится и ряд (3.6), а потому и гармонический ряд.

3. Рассмотрим ряд

$$\sin\frac{1}{1^2}+\sin\frac{1}{2^2}+\ldots+\sin\frac{1}{n^2}+\ldots \tag{3.7}$$

Так как

$$\sin\frac{1}{n^2}<\frac{1}{n^2},$$

члены ряда (3.6) меньше соответствующих членов ряда обратных квадратов. Следовательно, этот ряд сходится.

4. Пусть нам дан ряд

$$\operatorname{tg}\frac{1}{1}+\operatorname{tg}\frac{1}{2}+\ldots+\operatorname{tg}\frac{1}{n}+\ldots \tag{3.8}$$

Поскольку

$$\operatorname{tg}\frac{1}{n}>\frac{1}{n},$$

члены ряда (3.8) больше соответствующих членов гармонического ряда. Поэтому ряд (3.8) расходится.

Теорема 2 (второй признак сравнения). *Пусть*

$$u_1+u_2+\ldots+u_n+\ldots \tag{3.9}$$

и

$$v_1+v_2+\ldots+v_n+\ldots \tag{3.10}$$

— два ряда, причем можно указать такие постоянные $k>0$ *и* K, *что, начиная с некоторого* n,

$$k\leq\frac{u_n}{v_n}\leq K. \tag{3.11}$$

Тогда ряды (3.9) *и* (3.10) *одновременно сходятся или одновременно расходятся.*

Доказательство. Из (3.11) следует, что

$$kv_n \leq u_n \leq Kv_n. \qquad (3.12)$$

Если ряд (3.9) сходится, то из левого неравенства в (3.12) согласно первому признаку сравнения вытекает сходимость ряда

$$kv_1 + kv_2 + \ldots + kv_n + \ldots$$

Отсюда на основании дистрибутивного закона для рядов (см. теорему 2 § 8 главы 2) следует сходимость ряда (3.10). Поэтому если ряд (3.10) расходится, то и ряд (3.9) также должен расходиться.

Если сходится ряд (3.10), то по дистрибутивному закону для рядов должен сходиться ряд

$$Kv_1 + Kv_2 + \ldots + Kv_n + \ldots,$$

и, следовательно, по первому признаку сравнения, на основании правого неравенства в (3.12) — ряд (3.9). Значит, из сходимости ряда (3.9) следует сходимость ряда (3.10).

Примеры.

1. Рассмотрим ряд

$$\frac{1}{1^2 - 1/2} + \frac{1}{2^2 - 2/2} + \ldots + \frac{1}{n^2 - n/2} + \ldots \qquad (3.13)$$

и сравним его с рядом обратных квадратов (3.5).

Отношение

$$\frac{\dfrac{1}{n^2 - n/2}}{\dfrac{1}{n^2}} = \frac{n^2}{n^2 - n/2} = \frac{1}{1 - \dfrac{1}{2n}}$$

ограничено сверху числом 2. Поэтому из сходимости ряда обратных квадратов следует сходимость ряда (3.13).

2. Рассмотрим ряд

$$\sin\frac{1}{1} + \sin\frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots \qquad (3.14)$$

Составим отношения соответственных членов этого ряда и ряда (3.8):

$$\frac{\sin\dfrac{1}{n}}{\operatorname{tg}\dfrac{1}{n}} = \cos\frac{1}{n}.$$

Ввиду того, что при любом целом $n \geqq 1$

$$\frac{1}{2} < \cos\frac{1}{n} < 1,$$

ряд (3.14) ведет себя так же, как и ряд (3.8), т. е. должен расходиться.

3. Аналогично анализируется ряд

$$\operatorname{tg}\frac{1}{1^2} + \operatorname{tg}\frac{1}{2^2} + \ldots + \operatorname{tg}\frac{1}{n^2} + \ldots \tag{3.15}$$

Составив отношения членов этого ряда и ряда (3.7), мы получаем

$$\frac{\sin\frac{1}{n^2}}{\operatorname{tg}\frac{1}{n^2}} = \cos\frac{1}{n^2},$$

и так как

$$\frac{1}{2} < \cos\frac{1}{n^2} < 1,$$

ряд (3.15) сходится подобно ряду (3.7).

Следствие. *Если для рядов* (3.9) *и* (3.10) *отношение* $\frac{u_n}{v_n}$ *стремится к некоторому положительному и конечному пределу*

$$\lim_{n \to \infty} \frac{u_n}{v_n} = r > 0, \tag{3.16}$$

то ряды (3.9) и (3.10) *сходятся или расходятся одновременно.*

Доказательство. Соотношение (3.16) означает, что, начиная с некоторого места, все отношения вида $\frac{u_n}{v_n}$ будут достаточно близки к r и, в частности, будут находиться между числами $\frac{1}{2}r$ и $2r$. Интересующее нас утверждение получается непосредственной ссылкой на доказанную теорему.

Пример. Рассмотрим ряд

$$(e^{\frac{1}{1}} - 1) + (e^{\frac{1}{2}} - 1) + \ldots + (e^{\frac{1}{n}} - 1) + \ldots \tag{3.17}$$

Возьмем в качестве вспомогательного гармонический ряд, составим соотношение

$$\frac{e^{\frac{1}{n}}-1}{\frac{1}{n}}$$

и вычислим его предел, пользуясь правилом Лопиталя (дифференцированием по n; см. § 6 главы 1):

$$\lim_{n\to\infty}\frac{e^{\frac{1}{n}}-1}{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{-\frac{1}{n^2}e^{\frac{1}{n}}}{-\frac{1}{n^2}}=\lim_{n\to\infty}e^{\frac{1}{n}}=1.$$

Поэтому ряд (3.17) должен расходиться.

Следующий пример показывает, что признак сравнения, даваемый теоремой, существенно сильнее, чем признак в предельной форме, даваемый вытекающим из теоремы следствием.

Пример. Рассмотрим ряд

$$2\cdot 1+\frac{1}{2\cdot 2}+2\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{2\cdot 4}+2\cdot\frac{1}{5}+\ldots+\frac{2}{2k-1}+\frac{1}{2\cdot 2k}+\ldots \qquad (3.18)$$

Отношение его члена u_n к соответствующему члену гармонического ряда v_n будет

$$\frac{u_n}{v_n}=\begin{cases}\frac{2}{n}:\frac{1}{n}=2 & \text{для нечетного } n,\\ \frac{1}{2n}:\frac{1}{n}=\frac{1}{2} & \text{для четного } n.\end{cases}$$

Следовательно, отношение $\frac{u_n}{v_n}$ ни к какому пределу не стремится. Однако при всех значениях n оно заключено между числами $\frac{1}{2}$ и 2. Поэтому ряд (3.18) ведет себя так же, как гармонический ряд, т. е. расходится.

Из приведенных выше примеров сходящихся и расходящихся рядов можно усмотреть, что сходятся те ряды, у которых члены обнаруживают тенденцию к достаточно

быстрому убыванию. (Последний оборот речи, осторожный и даже несколько громоздкий, употреблен намеренно: члены сходящегося ряда вовсе не обязаны убывать монотонно, как это, скажем, видно из последнего примера.) Поэтому сравнение скоростей убывания членов различных рядов может быть положено в основу особого признака сравнения.

Теорема 3 (третий признак сравнения). *Если для двух рядов с положительными членами*

$$u_1+u_2+\ldots+u_n+\ldots \tag{3.19}$$

и

$$v_1+v_2+\ldots+v_n+\ldots, \tag{3.20}$$

начиная с некоторого n,

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}\leqq\frac{v_{n+1}}{v_n}, \tag{3.21}$$

то из сходимости ряда (3.20) *следует сходимость ряда* (3.19), *а из расходимости ряда* (3.19) — *расходимость ряда* (3.20).

Доказательство. Из (3.21) следует, что

$$\frac{u_{n+1}}{v_{n+1}}\leqq\frac{u_n}{v_n}, \tag{3.22}$$

начиная с некоторого $n=n_0$. Это значит, что отношения $\frac{u_n}{v_n}$, начиная с этого n_0, составляют убывающую последовательность. Поэтому, полагая

$$\frac{u_{n_0}}{v_{n_0}}=K,$$

мы из (3.22) получаем, что при $n\geqq n_0$

$$\frac{u_n}{v_n}\leqq K,$$

и требуемое следует из второго признака сравнения.

§ 3. Интегральный признак сходимости Маклорена — Коши[1])

Пусть дан ряд

$$u_1+u_2+\ldots+u_n+\ldots$$

Очевидно, каждый его член можно рассматривать как значение функции f от номера члена:

$$u_1=f(1),\ u_2=f(2),\ \ldots,\ u_n=f(n),\ \ldots$$

Эта функция определена пока только для целых положительных значений аргумента. Ясно, что, как-то определив значения функции для всех нецелых значений аргумента, больших единицы, мы сможем говорить о функции $f(x)$, принимающей значения для любого $x\geqq 1$. Например, в случае гармонического ряда

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots$$

такой функцией будет

$$f(x)=\frac{1}{x},$$

а в случае геометрической прогрессии $a,\ aq,\ \ldots,\ aq^{n-1}$ — показательная функция aq^{x-1}.

Теорема (интегральный признак сходимости Маклорена — Коши). *Пусть дан ряд*

$$u_1+u_2+\ldots+u_n+\ldots, \qquad (3.23)$$

члены которого положительны и не возрастают:

$$u_1\geqq u_2\geqq u_n\geqq\ldots$$

Пусть, далее f — функция, которая определена для всех вещественных $x\geqq 1$, непрерывна, не возрастает и

$$f(1)=u_1,\ f(2)=u_2,\ \ldots,\ f(n)=u_n,\ \ldots \qquad (3.24)$$

---

[1]) Обычио этот призиак иазывается иитегральиым призиаком сходимости Коши. В даином курсе мы будем иазывать его иитегральиым призиаком сходимости Маклореиа — Коши, во-первых, по соображеииям исторической справедливости, а во-вторых, чтобы ие путать его с другим призиаком сходимости Коши, о котором пойдет речь в § 6 этой главы.

Тогда для сходимости ряда (3.23) *необходимо и достаточно, чтобы сходился* (*существовал*) *несобственный интеграл*

$$\int_1^{\infty} f(x)\,dx.$$

Доказательство. Рассмотрим ряд, членами которого являются интегралы:

$$\int_1^2 f(x)\,dx + \int_2^3 f(x)\,dx + \ldots + \int_n^{n+1} f(x)\,dx + \ldots \quad (3.25)$$

Частичными суммами этого ряда, очевидно, также будут интегралы:

$$s_n = \int_1^2 f(x)\,dx + \ldots + \int_n^{n+1} f(x)\,dx = \int_1^{n+1} f(x)\,dx.$$

Сходимость ряда (3.25) означает существование предела последовательности частичных сумм, т. е. сходимость (существование) несобственного интеграла

$$\int_1^{\infty} f(x)\,dx. \quad (3.26)$$

Вспомним теперь, что функция $f(x)$ монотонна и не возрастает. Отсюда и из (3.24) следует, что для любого x между n и $n+1$

$$u_n \geqq f(x) \geqq u_{n+1}. \quad (3.27)$$

Интегрируя каждую из трех частей этого неравенства по x от n до $n+1$, мы приходим к неравенству интегралов

$$\int_n^{n+1} u_n\,dx \geqq \int_n^{n+1} f(x)\,dx \geqq \int_n^{n+1} u_{n+1}\,dx,$$

или

$$u_n \geqq \int_n^{n+1} f(x)\,dx \geqq u_{n+1}. \quad (3.28)$$

Пусть ряд (3.23) сходится. Обратим внимание на левую сторону неравенства (3.28). По признаку сравнения (см. § 3) должен сходиться и составленный из интегралов ряд (3.25), а следовательно, и несобственный интеграл (3.26).

Пусть теперь ряд (3.23) расходится. Тогда, как было доказано (см. § 9 главы 2), расходится и ряд

$$u_2+u_3+\ldots+u_{n+1}+\ldots,$$

получаемый из нашего ряда отбрасыванием его первого члена. Взглянем теперь на правую сторону неравенства (3.28) и применим снова признак сравнения, но уже в той его части, которая касается расходимости. Мы получим, что должен расходиться ряд интегралов (3.25), т. е. несобственный интеграл (3.26).

Теорема доказана.

§ 4. Применения интегрального признака сходимости

Достоинство интегрального признака сходимости Маклорена — Коши состоит в исключительно высокой его чувствительности. Этот признак четко проводит различие между сходящимся и расходящимся рядами, даже если члены одного из них лишь незначительно отличаются от членов другого.

Пример. В качестве первого примера применения интегрального признака сходимости рассмотрим уже исследованные нами ряды

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots$$

и

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}+\ldots \tag{3.29}$$

Для первого из этих рядов, т. е. для гармонического ряда, $f(x)=\frac{1}{x}$; в этом случае

$$\int_1^n f(x)\,dx=\int_1^n \frac{dx}{x}=\ln x\Big|_1^n=\ln n.$$

Так как $\ln n$ с ростом n неограниченно возрастает, несобственный интеграл

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x} = \lim_{n\to\infty} \int_1^{n} \frac{dx}{x}$$

расходится. Тем самым должен расходиться и гармонический ряд.

В случае ряда (3.29), очевидно, полагаем $f(x) = \frac{1}{x^2}$. Здесь

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x}\Bigg|_1^{\infty} = 1.$$

Интересующий нас несобственный интеграл сходится, так что сходится и ряд (3.29).

Чем больше показатель s, тем меньше члены ряда

$$\frac{1}{1^s} + \frac{1}{2^s} + \ldots + \frac{1}{n^s} + \ldots \tag{3.30}$$

Поэтому при $s < 1$ члены ряда (3.30) больше соответствующих членов гармонического ряда. Значит, по теореме § 3 при $s \leqq 1$ ряд (3.30) расходится. С другой стороны, при $s > 2$ члены ряда (3.30) меньше соответствующих членов сходящегося ряда «обратных квадратов» (3.29). Следовательно, при $s \geqq 2$ ряд (3.30) должен сходиться. Очевидно, «граничное» значение s, отделяющее сходящиеся ряды вида (3.30) от расходящихся, расположено где-то между числами 1 и 2.

В действительности эта граница проходит через число 1: для любого $s > 1$ ряд (3.30) сходится. В самом деле, пусть $s = 1 + \alpha$ ($\alpha > 0$). Рассмотрим функцию $\frac{1}{x^{1+\alpha}}$ и соответствующий несобственный интеграл

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^{1+\alpha}} = -\frac{1}{\alpha}\frac{1}{x^{\alpha}}\Bigg|_1^{\infty} = \frac{1}{\alpha}.$$

Из сходимости интеграла вытекает сходимость ряда.

Чувствительность интегрального признака сходимости не исчерпывается умением различать сходящиеся и расходящиеся ряды вида (3.30). Этот признак способен улавливать и менее заметные отличия в скорости убывания членов рядов.

Заметим, что при любом $\alpha > 0$, начиная с некоторого n,

$$\frac{1}{n} > \frac{1}{n\ln n} > \frac{1}{n^{1+\alpha}}. \tag{3.31}$$

В самом деле, прнменяя правнло Лопнталя (дифференцирование по n), мы получаем

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n^{\alpha}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}}{\alpha n^{\alpha-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\alpha n^{\alpha}}=0.$$

Значит, начнная с некоторого n должно быть

$$\ln n<n^{\alpha},$$

откуда следует правое неравенство в (3.31). Левое же неравенство в (3.31) очевидно.

Здесь ряд

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots$$

расходнтся, а ряд

$$\frac{1}{1^{1+\alpha}}+\frac{1}{2^{1+\alpha}}+\ldots+\frac{1}{n^{1+\alpha}}+\ldots$$

сходится. Что же касается ряда

$$\frac{1}{2\ln 2}+\frac{1}{3\ln 3}+\ldots+\frac{1}{(n+1)\ln(n+1)}+\ldots, \qquad (3.32)$$

то его члены, согласно неравенству (3.31), занимают промежуточное положение, и простыми сравнениямн решить вопрос о его сходнмости нельзя. Однако интегральный признак сходимости может выручить нас н в этом случае. Возьмем функцию $\frac{1}{x\ln x}$ и вычислим

$$\int_2^n\frac{dx}{x\ln x}=\int_2^n\frac{d\ln x}{\ln x}=\ln\ln x\Big|_2^n=\ln\ln n-\ln\ln 2.$$

Так как

$$\lim_{n\to\infty}\ln\ln n=\infty,$$

несобственный ннтеграл

$$\int_2^{\infty}\frac{dx}{x\ln x}$$

расходится; значит, расходится и ряд (3.32).

Рассмотрим теперь ряд

$$\frac{1}{2(\ln 2)^{1+\alpha}}+\frac{1}{3(\ln 3)^{1+\alpha}}+\ldots+\frac{1}{(n+1)(\ln(n+1))^{1+\alpha}}+\ldots \qquad (3.33)$$

при $\alpha > 0$. Возьмем для него функцию

$$f(x) = \frac{1}{x(\ln x)^{1+\alpha}}$$

и вычислим интеграл

$$\int_2^\infty \frac{dx}{x(\ln x)^{1+\alpha}} = \int_2^\infty \frac{d\ln x}{(\ln x)^{1+\alpha}} = -\frac{1}{\alpha}\frac{1}{(\ln x)^\alpha}\Bigg|_2^\infty = -\frac{1}{\alpha(\ln 2)^\alpha}.$$

Из сходимости этого несобственного интеграла следует сходимость ряда (3.33).

С другой стороны, для ряда

$$\frac{1}{3\ln 3\ln\ln 3} + \frac{1}{4\ln 4\ln\ln 4} + \ldots$$

$$\ldots + \frac{1}{(n+2)\ln(n+2)\ln\ln(n+2)} + \ldots \quad (3.34)$$

рассмотрение функции

$$f(x) = \frac{1}{x\ln x\ln\ln x}$$

и интеграла от нее

$$\int_3^n \frac{dx}{x\ln x\ln\ln x} = \int_3^n \frac{d\ln x}{\ln x\ln\ln x} = \int_3^n \frac{d\ln\ln x}{\ln\ln x} =$$

$$= \ln\ln\ln n - \ln\ln\ln 3$$

приводит к неограниченно возрастающей функции от n, так что несобственный интеграл

$$\int_3^\infty \frac{dx}{x\ln x\ln\ln x}$$

расходится, вследствие чего расходится и ряд (3.34).

Идя по этому пути, можно строить примеры все более медленно сходящихся рядов, равно как примеры все более лениво расходящихся рядов. Интегральный признак Маклорена — Коши будет неизменно распознавать их сходимость или расходимость.

§ 5. Признак сходимости Даламбера

На основе третьего признака сравнения легко формулировать и доказывать весьма удобные признаки сходимости. Рассмотрим один их них.

Теорема (признак сходимости Даламбера). *Если для ряда*

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots \tag{3.35}$$

с положительными членами, начиная с некоторого номера n_0 *отношение* $(n+1)$*-го члена к предыдущему,* $\frac{u_{n+1}}{u_n}$, *не будет превосходить некоторого числа* $q < 1$, *т. е. если*

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \leqq q < 1, \tag{3.36}$$

то ряд (3.35) *сходится.*

Наоборот, если для ряда (3.35), *начиная с некоторого номера* n_0, *отношение* $(n+1)$*-го члена к предыдущему,* $\frac{u_{n+1}}{u_n}$, *будет не меньше единицы, т. е. если*

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \geqq q > 1, \tag{3.37}$$

то ряд (3.35) *расходится.*

Доказательство. Пусть выполняется условие (3.36). Возьмем в третьем признаке сравнения в качестве вспомогательного ряда

$$v_1 + v_2 + \ldots + v_n + \ldots$$

сходящуюся геометрическую прогрессию

$$q + q^2 + \ldots + q^n + \ldots$$

В этом случае неравенство (3.36) может быть записано как

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \leqq \frac{q^{n+1}}{q^n} = \frac{v_{n+1}}{v_n}.$$

Это значит, что согласно третьему признаку сравнения ряд (3.35) сходится.

Пусть теперь выполняется условие (3.37). Возьмем в третьем признаке сравнения в качестве ряда

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots$$

расходящийся ряд

$$1 + 1 + \ldots + 1 + \ldots,$$

а в качестве ряда

$$v_1 + v_2 + \ldots + v_n + \ldots$$

— исследуемый ряд (3.35). В этом случае неравенство (3.37) переписывается как

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \leqq \frac{v_{n+1}}{v_n},$$

и ряд (3.35) расходится согласно третьему признаку сравнения.

Следствие. *Если для ряда* (3.35) *отношение* $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ *стремится к некоторому пределу, меньшему единицы:*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = r < 1, \tag{3.38}$$

то этот ряд сходится.

Если это отношение стремится к пределу, большему единицы:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = r > 1,$$

то ряд расходится

Доказательство. Предельное соотношение (3.38) означает, что, начиная с некоторого места, все отношения вида $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ будут достаточно близкими к значению предела r и, в частности, не будут превосходить некоторого числа q, лежащего между r и единицей. После сказанного нам остается сослаться на только что доказанную теорему.

Случай $r > 1$ рассматривается аналогично.

Прнмеры.

1. Для ряда

$$\frac{1}{3^4-4^3}+\frac{1}{3^5-5^3}+\ldots+\frac{1}{3^{n+3}-(n+3)^3}+\ldots \qquad (3.39)$$

мы нмеем

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{3^{n+3}-(n+3)^3}{3^{n+4}-(n+4)^3}.$$

Поэтому

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3^n-n^3}{3^{n+1}-(n+1)^3}=\lim_{n\to\infty}\frac{1-\frac{n^3}{3^n}}{3-\frac{(n+1)^3}{3^n}}.$$

Но, применяя правнло Лопнталя (с троекратным дифференцированнем каждый раз),

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^3}{3^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^3}{3^n}=0.$$

Следовательно,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{1}{3}<1,$$

так что ряд (3.39) сходнтся.

2. Следующий прнмер показывает, что, как н в случае второго прнзиака сравнення, описывающая прнзиак сходнмости Даламбера теорема существенно сильнее вытекающего из иее следствия, т. е. что существоваине стоящего в отиошеннн (3.38) предела для сходимости ряда ие обязательио.

Рассмотрнм ряд

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{2^2\cdot 3}+\frac{1}{2^2\cdot 3^2}+\ldots+\frac{1}{2^k\cdot 3^k}+\frac{1}{2^{k+1}\cdot 3^k}+$$
$$+\frac{1}{2^{k+1}\cdot 3^{k+1}}+\ldots \qquad (3.40)$$

Для этого ряда

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\begin{cases}\frac{1}{2}, & \text{еслн } n \text{ четное},\\ \frac{1}{3}, & \text{если } n \text{ нечетиое}.\end{cases}$$

Следовательно, отношенне $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ ни к какому пределу ие стремится. Так как вместе с тем оио для всех номеров ие превосходит половииы, в снлу теоремы ряд (3.40) сходнтся.

§ 6. Признак сходимости Коши

Сравнение рядов с прогрессиями приводит еще и к другому признаку сходимости, принадлежащему Коши.

Теорема (признак сходимости Коши). *Если для ряда*

$$u_1+u_2+\ldots+u_n+\ldots \tag{3.41}$$

с положительными членами, начиная с некоторого номера n_0, *корень* $\sqrt[n]{u_n}$ *не будет превосходить некоторого числа* $q<1$, *т. е. если*

$$\sqrt[n]{u_n}\leqq q<1 \qquad (n\geqq n_0), \tag{3.42}$$

то ряд (3.41) *сходится.*

Если с другой стороны, для ряда (3.41), *начиная с некоторого номера* n_0, *корень* $\sqrt[n]{u_n}$ *будет не меньше единицы:*

$$\sqrt[n]{u_n}\geqq 1 \qquad (n\geqq n_0),$$

то ряд (3.41) *расходится.*

Доказательство. Ограничимся рассмотрением ряда

$$u_{n_0}+u_{n_0+1}+\ldots \tag{3.43}$$

Из (3.42) мы в первой части теоремы имеем

$$u_{n_0}\leqq q^{n_0}, \quad u_{n_0+1}\leqq q^{n_0+1}, \ \ldots,$$

т. е. члены ряда (3.41) меньше соответствующих членов геометрической прогрессии

$$q^{n_0}, \ q^{n_0+1}, \ \ldots,$$

которая ввиду того, что $q<1$, сходится. Нам остается, как и при доказательстве признака сходимости Даламбера, сослаться на возможность отбрасывания конечного числа членов ряда и на признак сравнения.

Случай расходимости разбирается аналогично.

Подобно признаку сходимости Даламбера признак сходимости Коши имеет следствие в предельной форме: если для ряда (3.41)

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = q,$$

то при $q < 1$ этот ряд сходится, а при $q > 1$ — расходится.

Пример. Рассмотрим ряд

$$1 + \left(\frac{4}{5}\right)^2 + \left(\frac{5}{7}\right)^3 + \ldots + \left(\frac{n+2}{2n+1}\right)^n + \ldots$$

Для этого ряда

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n+2}{2n+1}\right)^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+2}{2n+1} = \frac{1}{2} < 1,$$

и поэтому он сходится.

§ 7. Чувствительность признаков сходимости Даламбера и Коши

Мы видели примеры весьма медленно сходящихся и весьма медленно расходящихся рядов. В их число прогрессии не входят: если в прогрессии знаменатель меньше единицы, то прогрессия относительно быстро сходится. С другой стороны, если знаменатель прогрессии не меньше единицы, то прогрессия расходится весьма быстро: частичные ее суммы, начиная с некоторого места, растут во всяком случае не медленнее, чем линейная функция.

В связи со сказанным едва ли можно надеяться, что основанные, по существу, только на свойствах прогрессий признаки сходимости Даламбера и Коши окажутся особенно чувствительными.

Действительно, рассмотрим снова гармонический ряд

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots$$

и ряд «обратных квадратов»

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}+\ldots$$

Расходимость первого и сходимость второго из этих рядов уже устанавливались нами дважды и в том числе при помощи интегрального признака Маклорена — Коши. Посмотрим, как работают применительно к этим рядам признаки Даламбера и Коши.

Признак Даламбера в каждом из этих случаев дает нам

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1$$

и

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{(n+1)^2}=1,$$

т. е. не приводит к определенному ответу.

Признак Коши для гармонического ряда дает

$$\lim_{n\to\infty}\ln\sqrt[n]{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\ln\frac{1}{n}=-\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n}=0,$$

откуда

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=1.$$

Вместе с тем и для ряда «обратных квадратов»

$$\lim_{n\to\infty}\ln\sqrt[n]{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\ln\frac{1}{n^2}=-\lim_{n\to\infty}2\frac{\ln n}{n}=0,$$

так что и в этом случае

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=1.$$

Таким образом, даже столь резко отличающееся друг от друга поведение этих двух рядов неразличимо для признаков Даламбера и Коши.

При этом все-таки признак Коши несколько чувствительнее, чем признак Даламбера. Это можно усмотреть из следующего примера.

Пример. Рассмотрим ряд

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^4}+\ldots+\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^{n+1}}+\ldots$$

В этом ряде

$$u_n = \begin{cases} \dfrac{1}{3^n} & \text{при четном } n, \\ \dfrac{1}{2^n} & \text{при нечетном } n. \end{cases}$$

Здесь, очевидно,

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \begin{cases} \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{3}{2}\right)^n & \text{при четном } n, \\ \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{2}{3}\right)^n & \text{при нечетном } n. \end{cases}$$

Таким образом, отношение $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ все время «перескакивает» через единицу, и признак Даламбера здесь неприменим.

Вместе с тем признак Коши дает нам

$$\sqrt[n]{u_n} = \begin{cases} \sqrt[n]{\dfrac{1}{3^n}} = \dfrac{1}{3} & \text{при четном } n, \\ \sqrt[n]{\dfrac{1}{2^n}} = \dfrac{1}{2} & \text{при нечетном } n \end{cases}$$

и тем самым указывает на сходимость ряда.

§ 8. Сравнительная оценка различных признаков сходимости

Качество признака сходимости определяется его широтой (применимостью), практичностью и чувствительностью.

Широта признака сходимости характеризуется классом тех рядов, к которым этот признак применим. Например, критерий сходимости Коши применим ко всем вообще численным рядам; большинство приведенных в этой главе признаков сходимости применимо к рядам с положительными членами; интегральный признак Маклорена — Коши применим к рядам, в которых положительные члены монотонно убывают с увеличением их номера. Всякая попытка анализа сходимости ряда при помощи того или иного признака должна начинаться с проверки того, входит ли исследуемый ряд в сферу применимости используемого признака.

После того как мы убедились, что выбранный признак сходимости применим к интересующему нас ряду, следует подумать о том, как выглядит это применение на практике. Соображения удобства, простоты, а иногда и самой фактической возможности применения признаков сходимости обычно играют важную роль.

Рассмотрим, например, ряд

$$\frac{1}{e^{1^2}}+\frac{1}{e^{2^2}}+\ldots+\frac{1}{e^{n^2}}+\ldots$$

Для установления его сходимости при помощи интегрального признака следует доказать сходимость несобственного интеграла

$$\int_1^\infty e^{-x^2}\,dx.$$

Можно, конечно, заметить, что

$$\int_1^\infty e^{-x^2}\,dx<\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx,$$

а последний интеграл есть так называемый интеграл Пуассона, который равен $\sqrt{\frac{\pi}{2}}$ (вычисление этого интеграла приведено в. § 5 главы 11). Однако, для того чтобы это сделать, нужно либо помнить значение интеграла Пуассона, либо уметь его вычислять. Что же говорить, например, о ряде

$$\frac{1}{e^{1^3+\sqrt{1}}}+\frac{1}{e^{2^3+\sqrt{2}}}+\ldots+\frac{1}{e^{n^3+\sqrt{n}}}+\ldots,$$

для которого интегральный признак Маклорена — Коши требует работы с интегралом $\int_1^\infty e^{-x^3-\sqrt{x}}\,dx$?

Вместе с тем очевидно, что при $n>1$

$$\frac{1}{e^{n^2}}<\frac{1}{e^n}$$

и

$$\frac{1}{e^{n^3+\sqrt{n}}}<\frac{1}{e^{n^3}}<\frac{1}{e^n},$$

так что по первому признаку сравнения оба рассматриваемых ряда сходятся (ибо сходится геометрическая прогрессия со знаменателем $1/e$).

Таким образом, путь непосредственного вычисления интеграла при применении интегрального признака сходимости не всегда приемлем. Правда, иногда можно прийти к цели путем каких-нибудь косвенных оценок величины этого интеграла, но это обычно представляет собой самостоятельную задачу, часто даже более трудную, чем анализ самого ряда.

Следовательно, при изучении рядов ограничиться одним только интегральным признаком сходимости нельзя, и необходимо овладеть еще другими признаками сходимости, быть может, не столь чувствительными, как интегральный признак, но зато более удобными в обращении.

Наконец, для того чтобы применение признака сходимости было не только возможным, но и действительно приводило к цели, признак должен быть достаточно чувствительным. Примеры, приведенные в §§ 5—7, и показывают, что признаки Даламбера и Коши при всей их широте и практичности недостаточно чувствительны. Идеально чувствительными признаками являются «необходимые и достаточные» признаки, как, например, критерий Коши и интегральный признак. Однако все такие признаки, если только они достаточно широки, неизбежно оказываются непрактичными.

ГЛАВА 4

ЗНАКОПЕРЕМЕННЫЕ РЯДЫ

§ 1. Абсолютная сходимость и условная сходимость

Знакопеременным рядом называется ряд, членами которого являются вещественные числа произвольного знака[1]). Пусть

$$u_1+u_2+\ldots+u_n+\ldots \qquad (4.1)$$

— некоторый знакопеременный ряд. Некоторую информацию об этом ряде можно получить, рассматривая ряд

$$|u_1|+|u_2|+\ldots+|u_n|+\ldots, \qquad (4.2)$$

членами которого являются абсолютные величины (модули) членов знакопеременного ряда (4.1). Этот составленный из модулей ряд является, очевидно, рядом с положительными членами и потому его можно изучать на основании приемов, изложенных выше. Между сходимостью ряда (4.1) и сходимостью ряда (4.2) существует известная связь.

Определение. Знакопеременный ряд (а также ряд с комплексными членами) называется *абсолютно сходящимся*, если сходится ряд, составленный из модулей его членов.

Абсолютно сходящиеся ряды во многих отношениях напоминают ряды с положительными членами.

---

[1]) Иногда знакопеременными рядами называются такие ряды, в которых любые два соседних члена имеют различные знаки. Далее мы будем употреблять термин «знакопеременный ряд» в указанном выше более общем смысле и называть ряды, в которых члены попеременно положительны и отрицательны, *знакочередующимися* рядами (см. § 6).

Определение. Знакопеременный ряд (ряд с комплексными членами) называется *условно сходящимся*, если он сходится, но не сходится абсолютно[1]).

Для условно сходящихся рядов некоторые привычные законы арифметики не имеют места.

§ 2. Абсолютная сходимость и расходимость

Теорема 1. *Всякий абсолютно сходящийся ряд сходится.*

Доказательство. Пусть

$$u_1+u_2+\ldots+u_n+\ldots \qquad (4.3)$$

— некоторый знакопеременный ряд, который абсолютно сходится. Это означает, что сходится ряд

$$|u_1|+|u_2|+\ldots+|u_n|+\ldots \qquad (4.4)$$

Тогда по теореме об умножении ряда на число (см. § 8 гл. 2) сходится и ряд

$$2|u_1|+2|u_2|+\ldots+2|u_n|+\ldots$$

Но очевидно, что при любом n

$$0\leq u_n+|u_n|\leq 2|u_n|.$$

Следовательно, по признаку сравнения рядов (см. § 2 главы 3) сходится и ряд

$$(u_1+|u_1|)+(u_2+|u_2|)+\ldots+(u_n+|u_n|)+\ldots \qquad (4.5)$$

Но тогда по теореме о вычитании рядов (см. § 8 главы 2) сходится и ряд, членами которого являются разности соответствующих членов рядов (4.5) и (4.4), т. е. ряд (4.3).

Доказанная теорема остается в силе и в том случае, когда члены ряда (4.3) являются комплексными числами.

Действительно, положим

$$u_n=v_n+iw_n.$$

---

[1]) Иногда такие ряды называются *неабсолютно сходящимися* или *полусходящимися*.

Тогда должно быть

$$|u_n| = \sqrt{v_n^2 + w_n^2} \geqq |v_n|,$$
$$|u_n| = \sqrt{v_n^2 + w_n^2} \geqq |w_n|.$$

Из сходимости ряда (4.4) следует поэтому сходимость обоих рядов

$$v_1 + v_2 + \ldots + v_n + \ldots,$$
$$w_1 + w_2 + \ldots + w_n + \ldots$$

и тем самым сходимость ряда

$$(v_1 + iw_1) + (v_2 + iw_2) + \ldots + (v_n + iw_n) + \ldots,$$

т. е. ряда (4.3).

Теорема 2. *Если*

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots \tag{4.6}$$

— абсолютно сходящийся ряд с суммой s, *а сумма ряда*

$$|u_1| + |u_2| + \ldots + |u_n| + \ldots \tag{4.7}$$

равна S, *то*

$$|s| \leqq S. \tag{4.8}$$

Доказательство. Мы имеем для n-й частичной суммы s_n ряда (4.6)

$$|s_n| \leqq |u_1| + |u_2| + \ldots + |u_n|.$$

Переходя в этом неравенстве к пределу по n при $n \to \infty$, мы получаем (4.8).

Следствие. *Если n-й остаток абсолютно сходящегося ряда* (4.6) *есть* r_n, *а n-й остаток ряда* (4.7) *есть* R_n, *то*

$$|r_n| \leqq R_n.$$

Примеры.

1. Ряд

$$\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \ldots + (-1)^{n+1}\frac{1}{n^2} + \ldots$$

сходится абсолютно, потому что сходится ряд «обратных квадратов»

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} + \ldots$$

Следовательно, по доказанной теореме ряд сходится.

2. Ряд

$$\frac{\sin\alpha}{1^2}+\frac{\sin 2\alpha}{2^2}+\ldots+\frac{\sin n\alpha}{n^2}+\ldots \tag{4.9}$$

является знакопеременным. Составим ряд из абсолютных величин членов нашего ряда

$$\left|\frac{\sin\alpha}{1^2}\right|+\left|\frac{\sin 2\alpha}{2^2}\right|+\ldots+\left|\frac{\sin n\alpha}{n^2}\right|+\ldots \tag{4.10}$$

Члены последнего ряда не превосходят соответствующих членов ряда «обратных квадратов». Но ряд «обратных квадратов» сходится; поэтому сходится и ряд (4.10). Это значит, что ряд (4.9) сходится абсолютно и тем самым сходится.

С другой стороны, существуют знакопеременные сходящиеся ряды, которые не сходятся абсолютно.

Пример. Рассмотрим ряд

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{1}{n}+\ldots \tag{4.11}$$

Модули членов этого ряда составляют гармонический ряд, который расходится (см. § 2 главы 3). Следовательно, ряд (3.11) не является абсолютно сходящимся.

Убедимся в том, что он все-таки сходится. Пусть s_n — n-я частичная сумма ряда (4.11). Мы имеем

$$s_{2k}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k}=$$

$$=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{(2k-1)\,2k}.$$

Сравнение ряда

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{(2k-1)\,2k}+\ldots \tag{4.12}$$

с рядом «обратных квадратов» указывает на его сходимость. Пусть

$$\lim_{k\to\infty} s_{2k}=s. \tag{4.13}$$

Далее

$$s_{2k+1}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\ldots-\frac{1}{2k}+\frac{1}{2k+1}=$$

$$=1-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{2k}-\frac{1}{2k+1}\right)=$$

$$=1-\left(\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{4\cdot 5}+\ldots+\frac{1}{2k\,(2k+1)}\right).$$

Ряд

$$\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{4\cdot 5}+\ldots+\frac{1}{2k(2k+1)}+\ldots \qquad (4.14)$$

также сходится (чтобы в этом убедиться, достаточно сравнить и его с рядом «обратных квадратов» или с рядом (4.12)). Пусть его сумма равна s'

$$\lim_{k\to\infty} s_{2k+1}=1-s'. \qquad (4.15)$$

Но сумма ряда, составленного из сумм членов рядов (4.12) и (4.14),

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}+\ldots,$$

как было установлено в § 8 главы 2, равна 1. Следовательно, по теореме о сложении рядов (теорема 4 § 8 главы 2) $s+s'=1$, т. е. $1-s'=s$. Значит, (4.15) можно переписать как

$$\lim_{k\to\infty} s_{2k+1}=s.$$

Вместе с (4.13) это дает нам

$$\lim_{n\to\infty} s_n=s,$$

а тем самым сходимость ряда (4.11).

§ 3. Возможность переставлять члены в абсолютно сходящихся рядах

Теорема. *Если в абсолютно сходящемся ряде произвольным образом переставить члены, то полученный ряд также будет абсолютно сходиться, а сумма его будет равна сумме исходного ряда.*

Доказательство. Пусть

$$u_1+u_2+\ldots+u_n+\ldots \qquad (4.16)$$

— абсолютно сходящийся ряд с суммой s, а

$$v_1+v_2+\ldots+v_n+\ldots \qquad (4.17)$$

— ряд, полученный из (4.16) произвольной перестановкой его членов. Из абсолютной сходимости (4.16) вытекает сходимость ряда

$$|u_1|+|u_2|+\ldots+|u_n|+\ldots \qquad (4.18)$$

Обозначим сумму этого ряда через S. Но по теореме Дирихле (см. теорему 3 § 8 главы 2) ни сходимость ряда (4.18), ни его сумма не изменятся от перестановки членов ряда. В частности, должен сходиться и иметь сумму S ряд

$$|v_1|+|v_2|+\ldots+|v_n|+\ldots \qquad (4.19)$$

Тем самым ряд (4.17) сходится абсолютно и поэтому сходится. Обозначим его сумму через s^*.

Составим теперь ряд

$$(|u_1|+u_1)+(|u_2|+u_2)+\ldots+(|u_n|+u_n)+\ldots \qquad (4.20)$$

По теореме о сложении рядов (теорема 4 § 8 главы 2) этот ряд сходится и сумма его равна $S+s$.

Заметим теперь, что

$$|u_n|+u_n\geqq 0,$$

т. е. что члены ряда (4.20) неотрицательны. Переставим члены этого ряда так же, как переставлялись члены ряда (4.16). Мы получим ряд

$$(|v_1|+v_1)+(|v_2|+v_2)+\ldots+(|v_n|+v_n)+\ldots \qquad (4.21)$$

Ввиду неотрицательности членов ряда (4.20), к нему также применима теорема Дирихле, согласно которой ряд (4.21) сходится, и его сумма равна $S+s$. С другой стороны, ряд (4.21) является суммой сходящихся рядов (4.19) и (4.17). Поэтому по теореме о сложении рядов его сумма равна $S+s^*$. Таким образом,

$$S+s=S+s^*,$$

откуда следует, что $s=s^*$.

§ 4. Условно сходящиеся ряды

Установим два важных свойства условно сходящихся рядов.

Теорема 1. *Пусть*

$$u_1+u_2+\ldots+u_n+\ldots \qquad (4.22)$$

— условно сходящийся ряд,

$$v_1+v_2+\ldots+v_n+\ldots \qquad (4.23)$$

— ряд, составленный из положительных членов ряда (4.22), *а*

$$w_1 + w_2 + \ldots + w_n + \ldots \qquad (4.24)$$

— ряд, составленный из абсолютных величин отрицательных членов ряда (4.22).

Тогда оба ряда (4.23) *и* (4.24) *расходятся.*

Доказательство. Предположим сначала, что сходятся оба ряда (4.23) и (4.24). Заменим в ряде (4.22) все отрицательные члены нулями. Мы получим ряд (4.23), «разбавленный» нулями, который ввиду теоремы 5 § 8 главы 2 должен сходиться. Заменим, далее, в ряде (4.22) нулями все положительные члены, а у отрицательных изменим знаки. В результате получится «разбавленный нулями» ряд (4.24), сходящийся в силу тех же причин. Сумма двух построенных «разбавленных» рядов есть, очевидно, ряд модулей членов ряда (4.22), который тем самым по теореме о сложении рядов должен сходиться. Последнее же противоречит условию теоремы.

Пусть теперь сходится один из рядов (4.23) и (4.24), скажем, для определенности ряд (4.23), а ряд (4.24) расходится. Разбавим ряд (4.23), как это мы только что делали, нулями и вычтем полученный сходящийся ряд из (4.22), изменив у оставшихся членов знаки. Отбросив соответствующие нули, мы придем к ряду (4.24). По теореме о вычитании рядов он должен сходиться, а это противоречит только что сделанному предположению.

Теорема 2. *Пусть ряд*

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots \qquad (4.25)$$

сходится условно. Тогда, каково бы ни было число s, можно надлежащей перестановкой членов ряда (4.25) *получить сходящийся ряд*

$$v_1 + v_2 + \ldots + v_n + \ldots, \qquad (4.26)$$

сумма которого будет равна s.

Доказательство. Будем выписывать подряд положительные члены ряда (4.25), пока их сумма не превзойдет s (может случиться, что таких членов не придется брать вовсе):

$$v_1 + v_2 + \ldots + v_{k-1} \leqq s,$$
$$v_1 + v_2 + \ldots + v_{k-1} + v_k > s$$

(ряд, составленный из положительных членов ряда (4.25), согласно предыдущей теореме, расходится, так что мы можем набрать сколь угодно большую сумму). Затем будем приписывать к имеющейся сумме отрицательные члены, пока новая сумма не опустится ниже s:

$$v_1 + \ldots + v_k + v_{k+1} + \ldots + v_{k+l-1} \geqq s,$$

$$v_1 + \ldots + v_k + v_{k+1} + \ldots + v_{k+l-1} + v_{k+l} < s$$

(расходимость ряда отрицательных членов (4.26) обеспечивает нам такую возможность). Далее будем повторять этот процесс приписывания к сумме новых групп положительных и отрицательных членов, каждый раз минимально переходя через s. После каждого перехода частичная сумма ряда (4.26) будет по построению отличаться от s менее чем на абсолютную величину члена, последнего из приписанных в этом или в предыдущем переходах. Но по необходимому признаку сходимости ряда (§ 6 главы 2) эта абсолютная величина стремится к нулю. Следовательно, последовательность частичных сумм ряда (4.26) имеет пределом s, а это и означает требуемое.

Доказанная теорема подчеркивает нетривиальность теоремы о возможности неограниченной перестановки членов в абсолютно сходящихся рядах, установленной в предыдущем пункте. Заметим вместе с тем, что любые перестановки конечного числа членов допускаются в любых рядах; они не сказываются ни на сходимости рядов, ни на величине их суммы.

§ 5. Умножение абсолютно сходящихся рядов

Абсолютно сходящиеся ряды можно перемножать.

Теорема. *Пусть даны два абсолютно сходящихся ряда: ряд*

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots \tag{4.27}$$

с частичными суммами s_n и суммой s и ряд

$$v_1 + v_2 + \ldots + v_n + \ldots \tag{4.28}$$

с частичными суммами t_n и суммой t.

Тогда ряд, членами которого являются все произведения любого члена первого ряда на любой член второго, также сходится абсолютно и сумма его равна произведению st.

Доказательство. Будем выписывать произведения $u_i v_j$ по определенной системе:

$$u_1v_1+ \\ +u_2v_1+u_2v_2+u_1v_2+ \\ +u_3v_1+u_3v_2+u_3v_3+u_2v_3+u_1v_3+\ldots \qquad (4.29)$$

(стоящие в каждой строке слагаемые соответствуют последовательным «окаймлениям» квадратов на рис. 1). В первой строке здесь выписан один член, во второй — три члена, в третьей — 5 и т. д. Очевидно, частичная сумма r_{n^2} этого ряда состоит из n^2 слагаемых, составляющих на рис. 1 квадрат. Ясно, что пока мы не доказали абсолютной сходимости ряда (4.29), наши рассуждения относятся не к любому ряду, члены которого являются произведениями членов рядов (4.27) и (4.28), а лишь к конкретному ряду (4.29).

u_1v_1	u_1v_2	u_1v_3
u_2v_1	u_2v_2	u_2v_3
u_3v_1	u_3v_2	u_3v_3
u_4v_1		

Рис. 1.

Мы видим, что $r_{n^2}=s_nt_n$. При переходе к пределу при $n\to\infty$ правая часть этого равенства стремится по условию к st. Следовательно, и

$$\lim_{n\to\infty} r_{n^2}=st.$$

К сожалению,

$$r_{1^2},\ r_{2^2},\ \ldots,\ r_{n^2},\ \ldots$$

составляют лишь частичную последовательность частичных сумм ряда-произведения (4.29). Поэтому из полученного предельного соотношения еще не следует нужного нам

$$\lim_{n\to\infty} r_n=st.$$

Для получения этого результата нам придется еще показать, что для достаточно больших квадратов любые суммы чисел, стоящих в их окаймлениях этих квадратов, сколь угодно малы.

Пусть теперь k — некоторое натуральное число, а n^2 — ближайший к нему снизу квадрат. Положим

$$r_k = r_{n^2} + q_{k_n},$$

где q_{k_n} — сумма некоторого количества членов ряда (4.29), стоящих в окаймлении n-го квадрата, т. е. в $(n+1)$-й строке выражения (4.29).

Абсолютная сходимость рядов (4.27) и (4.28) означает сходимость рядов

$$|u_1| + |u_2| + \ldots + |u_n| + \ldots \qquad (4.30)$$

и

$$|v_1| + |v_2| + \ldots + |v_n| + \ldots \qquad (4.31)$$

Пусть S и T — соответственно суммы этих рядов.

Ясно, что

$$|q_{k_n}| < |u_{n+1}v_1| + |u_{n+1}v_2| + \ldots + |u_{n+1}v_{n+1}| + \\ + |u_n v_{n+1}| + |u_1 v_{n+1}| = \\ = |u_{n+1}| (|v_1| + \ldots + |v_{n+1}|) + \\ + |v_{n+1}| (|u_n| + \ldots + |u_1|) < |u_{n+1}| T + |v_{n+1}| S.$$

Из сходимости рядов (4.30) и (4.31) следует, что

$$\lim_{n\to\infty} |u_{n+1}| = \lim_{n\to\infty} |v_{n+1}| = 0,$$

откуда

$$\lim_{n\to\infty} |q_{k_n}| \leqq \lim_{n\to\infty} (|u_{n+1}| S + |v_{n+1}| T) = 0,$$

так что

$$\lim_{k\to\infty} r_k = \lim_{n\to\infty} r_{n^2} + \lim_{n\to\infty} q_{k_n} = st.$$

Следовательно, ряд (4.29) сходится, и сумма его равна st.

Переходя к рядам (4.30) и (4.31) и повторяя применительно к ним те же рассуждения, мы видим, что ряд (4.29) сходится абсолютно и сумма абсолютных величин его членов равна ST.

Нам остается заметить, что на основании теоремы о перестановке членов абсолютно сходящихся рядов сходимость интересующего нас ряда, равно как и его сумма, не зависит от того конкретного порядка, в каком мы выписывали его члены.

§ 6. Признак сходимости Лейбница

Определение. Знакопеременный ряд называется *знакочередующимся*, если соседние его члены имеют различные знаки.

Примерами знакочередующихся рядов могут служить геометрические прогрессии с отрицательными знаменателями.

Для знакочередующихся рядов имеется достаточно общий, чувствительный и практичный признак сходимости, принадлежащий Лейбницу.

Теорема (признак сходимости Лейбница). *Если абсолютные величины членов знакочередующегося ряда*

$$u_1 - u_2 + u_3 - \ldots + (-1)^{n+1} u_n + \ldots \tag{4.32}$$

образуют монотонно убывающую последовательность, стремящуюся к нулю, т. е. если

$$u_1 \geqq u_2 \geqq \ldots \geqq u_n \geqq \ldots \tag{4.33}$$

и

$$\lim_{n \to \infty} u_n = 0, \tag{4.34}$$

то ряд (4.32) *сходится*.

Доказательство. Мы имеем для любого $n = 1, 2, \ldots$

$$s_{2n} = u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \ldots + u_{2n-1} - u_{2n-2}$$

или, объединяя члены в группы (сумма s_{2n} содержит только конечное число слагаемых, и потому основные законы действий справедливы здесь без каких-либо

ограничений),

$$s_{2n} = u_1 - (u_2 - u_3) - (u_4 - u_5) - \ldots - (u_{2n-2} - u_{2n-1}) - u_{2n}.$$

На основании невозрастания последовательности абсолютных величин членов ряда во всех скобках стоят неотрицательные числа. Следовательно,

$$s_{2n} < u_1.$$

Поэтому частичные суммы ряда (4.32) с четными номерами составляют ограниченную последовательность.

С другой стороны, в силу той же монотонности

$$s_{2n+2} - s_{2n} = (s_{2n+2} - s_{2n+1}) + (s_{2n+1} - s_{2n}) = \\ = -u_{2n+2} + u_{2n+1} \geqq 0,$$

и потому последовательность частичных сумм с четными номерами является неубывающей. Следовательно, эта последовательность имеет предел

$$\lim_{n\to\infty} s_{2n} = s < u_1. \qquad (4.35)$$

Далее,

$$s_{2n+1} = s_{2n} + u_{2n+1},$$

так что

$$\lim_{n\to\infty} s_{2n+1} = \lim_{n\to\infty} s_{2n} + \lim_{n\to\infty} u_{2n+1}.$$

Оба предела справа существуют, причем второй из них по условию равен нулю. Следовательно, существует и предел слева, и для него

$$\lim_{n\to\infty} s_{2n+1} = s.$$

Вместе с (4.35) это дает нам

$$\lim_{n\to\infty} s_n = s,$$

что и требовалось.

Следствие. *Для знакочередующегося ряда $u_1 - u_2 + \ldots \pm u_n \mp \ldots$, удовлетворяющего признаку сходимости Лейбница, остаток R_n можно сверху оценить*

по абсолютной величине:

$$|R_n| \leq |u_{n+1}|.$$

В самом деле, остаток R_n можно рассматривать как сумму ряда

$$R_n = \pm u_{n+1} \mp u_{n+2} \pm u_{n+3} \mp \ldots,$$

которая, как следует из доказанной теоремы, не превосходит по абсолютной величине своего первого члена, которым в данном случае является u_{n+1}.

Пример. В применении к ряду

$$\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + (-1)^{n+1}\frac{1}{n} + \ldots$$

признак Лейбница дает

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty}\left(\pm\frac{1}{n}\right) = 0,$$

что означает сходимость ряда. (Непосредственными выкладками эта сходимость была установлена в § 2.)

§ 7. Существенность условий признака сходимости Лейбница

Обратим внимание на то, что в признаке сходимости Лейбница указываются *три* условия, которым должен удовлетворять ряд: знакочередуемость членов ряда, а также монотонность и сходимость к нулю их абсолютных величин. Каждое из этих трех условий является существенным и поэтому подлежит проверке.

Во-первых, в признаке сходимости Лейбница нельзя отбросить условие знакочередуемости. Можно построить примеры рядов, у которых последовательность абсолютных величин членов монотонно стремится к нулю, но которые расходятся из-за того, что знаки членов ряда не чередуются, а распределены более сложно.

Пример. В ряде

$$\frac{1}{1} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \frac{1}{4} - \ldots \qquad (4.36)$$

абсолютные величины членов не возрастают и стремятся к нулю. Однако все частичные суммы вида

$$s_{\frac{n(n+1)}{2}} = \begin{cases} 1 & \text{при нечетном } n, \\ 0 & \text{при четном } n, \end{cases}$$

а остальные частичные суммы принимают промежуточные значения. Очевидно, такая последовательность частичных сумм предела не имеет, и потому ряд (4.36) расходится.

Во-вторых, для сходимости знакочередующегося ряда важно условие (4.33). Существуют расходящиеся ряды, для которых выполняются все условия теоремы Лейбница, кроме (4.33).

Пример. Ряд

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}+\ldots+\frac{1}{n}-\frac{1}{2n}+\ldots$$

знакочередующийся, и для него выполняется условие (4.34), но не условие (4.33). Этот ряд расходится. В самом деле, если бы он сходился, то сходился бы по ассоциативному закону (см. теорему 1 § 8 главы 2) и ряд

$$\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{2n}\right)+\ldots,$$

т. е. ряд

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2n}+\ldots=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots\right).$$

Но в скобках здесь стоит гармонический ряд, который, как известно, расходится.

Наконец, в-третьих, существенность условия (4.34) видна на примере ряда

$$1-\frac{3}{4}+\frac{5}{8}-\frac{9}{16}+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{2^{n-1}+1}{2^n}+\ldots$$

Этот ряд — знакочередующийся, и его члены по абсолютной величине монотонно убывают. Однако здесь

$$\lim_{n\to\infty} u_{2n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{2^{2n}+1}{2^{2n+1}}=\frac{1}{2},$$

$$\lim_{n\to\infty} u_{2n}=\lim_{n\to\infty}-\frac{2^{2n-1}+1}{2^{2n}}=-\frac{1}{2},$$

и ряд расходится. Для него

$$\lim_{n\to\infty} s_{2n+1}=\frac{5}{6},\qquad \lim_{n\to\infty} s_{2n}=\frac{1}{3}.$$

ГЛАВА 5

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ РЯДЫ

§ 1. Определение функционального ряда

Понятие функциональной зависимости является одним из важнейших в математике. Всякая функция осуществляет некоторое соответствие между объектами, составляющими область задания этой функции, и объектами, составляющими область ее значений. Так можно рассматривать числовые функции от чисел (при этом числу-аргументу ставится в соответствие число, являющееся значением функции); можно говорить о числовых функциях от систем чисел (то, что обычно называется функциями нескольких переменных); можно говорить о вектор-функциях (т. е. о функциях, значениями которых являются векторы) и т. д. Близкими к вектор-функциям являются такие функции, которые ставят в соответствие числам — ряды. Эти функции называются функциональными рядами.

Так как задание ряда состоит в задании каждого его члена, а член ряда есть число, задание функционального ряда от некоторой переменной x состоит в задании ряда функций от этой переменной, являющихся членами функционального ряда. Таким образом, мы приходим к следующему определению.

Определение. Выражение

$$u_1(x)+u_2(x)+\ldots+u_n(x)+\ldots \qquad (5.1)$$

называется *функциональным рядом относительно переменной x.*

Если переменная x может принимать только вещественные значения, а параметры функций, являющихся

членами ряда (5.1), также все вещественные, то ряд (5.1) называется *вещественным рядом.*

Если же значения переменной x, равно как и параметры функций $u_n(x)$, могут быть не только вещественными, но и комплексными, то ряд (5.1) называется *комплексным рядом.*

Примеры.

1. Если x принимает только вещественные значения, то ряд

$$\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots$$

является вещественным рядом относительно переменной x.

2. Этот же ряд можно рассматривать как комплексный ряд относительно переменной z:

$$\frac{z}{1!}+\frac{z^2}{2!}+\ldots+\frac{z^n}{n!}+\ldots,$$

если z есть комплексная переменная.

Говоря в данной главе об общих функциональных рядах, мы будем каждый раз иметь в виду только вещественные ряды. Некоторые вопросы, касающиеся комплексных рядов, будут затронуты в следующей главе.

Каждый из членов функционального ряда может быть, в частности, и постоянной. В этом случае функциональный ряд превращается в числовой. Таким образом, числовой ряд является частным случаем функционального.

§ 2. Область сходимости функционального ряда

Придавая в выражении (5.1) переменной x некоторые значения x_0, x_1 и т. д., мы будем получать те или иные числовые ряды

$$\begin{aligned} &u_1(x_0)+u_2(x_0)+\ldots+u_n(x_0)+\ldots, \\ &u_1(x_1)+u_2(x_1)+\ldots+u_n(x_1)+\ldots \end{aligned} \qquad (5.2)$$

и т. д.

В зависимости от значения, принимаемого переменной x, числовой ряд (5.2) может оказаться сходящимся или расходящимся.

Определение. Совокупность всех значений переменной x, для которых ряд (5.2) сходится, называется *областью сходимости* функционального ряда (5.1).

Если значение x_0 переменной x принадлежит области сходимости функционального ряда

$$u_1(x)+u_2(x)+\ldots+u_n(x)+\ldots,$$

то можно говорить о сумме этого функционального ряда в точке $x=x_0$:

$$u_1(x_0)+u_2(x_0)+\ldots+u_n(x_0)+\ldots=s(x_0).$$

Таким образом, значение суммы функционального ряда зависит от значения x_0 переменной x, т. е. сумма функционального ряда сама является функцией переменной x. Это и отражено в обозначении $s(x_0)$. Подчеркнем, что областью задания суммы функционального ряда является область сходимости этого ряда.

Сумма функционального ряда, понимаемая как функция, в принципе ничем не отличается от функций, получаемых каким-нибудь другим путем. В частности, можно ставить и решать вопросы о ее непрерывности, дифференцируемости, интегрируемости и т. д. Можно интересоваться также тем, какие функции можно получать в виде сумм функциональных рядов и как находить ряды, у которых суммами были бы заданные функции. Изучение этих и подобных вопросов и составляет содержание всей оставшейся части курса.

Примеры.

1. Ряд

$$\frac{x}{2}+\frac{x^2}{2^2}+\ldots+\frac{x^n}{2^n}+\ldots \tag{5.3}$$

при каждом x представляет собой геометрическую прогрессию со знаменателем $x/2$. Условие сходимости этого ряда состоит в том, чтобы $|x/2|<1$. Таким образом, область сходимости ряда (5.3) состоит из всех тех значений переменной x, для которых $|x|<2$.

2. Ряд

$$\frac{1}{1^x}+\frac{1}{2^x}+\ldots+\frac{1}{n^x}+\ldots,$$

как было установлено, сходится при $x > 1$ и расходится при $x \leq 1$. Следовательно, область сходимости этого ряда состоит из всех значений x, для которых $x > 1$, или, короче, область сходимости этого ряда описывается неравенством $x > 1$.

3. Члены функционального ряда

$$\frac{1}{1+x^2}+\frac{1}{4+x^2}+\ldots+\frac{1}{n^2+x^2}+\ldots \tag{5.4}$$

при любом x меньше соответствующих членов ряда «обратных квадратов»

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{n^2}+\ldots$$

Так как последний ряд сходится, должен сходиться и ряд (5.4) при любом x. Таким образом, областью сходимости ряда (5.4) является множество всех вещественных чисел.

4. В ряде

$$\frac{1}{0!}+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots \tag{5.5}$$

при любом $x=x_0$ отношение последующего члена к предыдущему равно

$$\frac{x_0^{n+1}}{(n+1)!}:\frac{x_0^n}{n!}=\frac{x_0}{n+1}$$

и, очевидно, при возрастании n стремится к нулю. Следовательно, при любом x_0 ряд

$$\frac{1}{0!}+\frac{x_0}{1!}+\frac{x_0^2}{2!}+\ldots+\frac{x_0^n}{n!}+\ldots$$

согласно признаку сходимости Даламбера является сходящимся. Таким образом, область сходимости функционального ряда (5.5) состоит из всех вещественных чисел.

5. Функциональный ряд

$$0!+x\,1!+x^2\,2!+\ldots+x^n\,n!+\ldots$$

при любом значении $x \neq 0$ расходится (это проверяется без труда при помощи признака Даламбера). Следовательно, область сходимости этого ряда исчерпывается числом 0.

6. Рассмотрим ряд

$$\frac{1}{2+\sin x}+\frac{1}{3+\sin x}+\ldots+\frac{1}{n+1+\sin x}+\ldots \tag{5.6}$$

Так как $\sin x \leq 1$, члены этого ряда не меньше соответствующих членов гармонического ряда, начиная с третьего:

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots,$$

который расходится. Следовательно, ряд (5.6) не сходится ни при каком значении x. Можно сказать, что область сходимости этого ряда пуста.

§ 3. Сходимость последовательности функций. Основные определения

Сейчас нам придется вспомнить некоторые факты, касающиеся сходимости последовательности функций.

Определение. Последовательность функций

$$s_1(x),\ s_2(x),\ \ldots,\ s_n(x),\ \ldots$$

сходится к предельной функции $s(x)$ *в точке* x_0, если

$$\lim_{n\to\infty} s_n(x_0)=s(x_0),$$

т. е. если для каждого $\varepsilon>0$ найдется такое n_0, что при $n>n_0$

$$|s_n(x_0)-s(x_0)|<\varepsilon.$$

Определение. Последовательность функций

$$s_1(x),\ s_2(x),\ \ldots,\ s_n(x),\ \ldots$$

сходится к предельной функции $s(x)$ *в некоторой области* (например, в сегменте $[a, b]$ или в интервале (a, b)), если для каждого x_0 из этой области

$$\lim_{n\to\infty} s_n(x_0)=s(x_0),$$

т. е. если для каждого $\varepsilon>0$ и x_0 из нашей области найдется такое n_0, что при $n>n_0$

$$|s_n(x_0)-s(x_0)|<\varepsilon.$$

Заметим, что в этом определении n_0 находится по каждому x_0 из нашей области, т. е., вообще говоря, *зависит* от x_0. Несколько иной факт описывается в следующем определении.

Определение. Последовательность функций

$$s_1(x),\ s_2(x),\ \ldots,\ s_n(x),\ \ldots \tag{5.7}$$

сходится к предельной функции $s(x)$ *равномерно в некоторой данной области*, если для каждого $\varepsilon > 0$ существует такое n_0, что при $n > n_0$ и *при любом* x_0 из области

$$|s_n(x_0) - s(x_0)| < \varepsilon.$$

Подчеркнем, что в отличие от предыдущего определения здесь утверждается существование n_0, в равной мере «обслуживающего» все значения x_0.

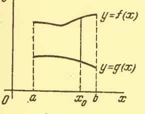


Рис. 2.

Различие между описанными видами сходимости последовательностей функций можно наглядно представить себе геометрически.

Рассмотрим графики двух функций $f(x)$ и $g(x)$, заданных на некотором промежутке с концами a и b (рис. 2). Ясно, что эти графики могут располагаться «близко» или «далеко» друг от друга. Однако если расстояние между точками на координатной плоскости понимается вполне определенным образом, то расстояние между графиками функций нуждается в специальном определении. Оказывается, что этому расстоянию можно дать несколько различных определений и каждое из них по-своему будет разумным.

Если функции последовательности

$$s_1(x),\ s_2(x),\ \ldots,\ s_n(x),\ \ldots \tag{5.8}$$

приближаются к функции $s(x)$ в смысле некоторого определения расстояния, то можно говорить, что имеет место *сходимость* последовательности (5.8) к функции $s(x)$ *в смысле этого расстояния*.

Например, можно фиксировать некоторую точку x_0, расположенную между a и b, и под расстоянием между графиками функций (и тем самым между самими функциями) $f(x)$ и $g(x)$ понимать

$$|f(x_0) - g(x_0)|. \tag{5.9}$$

Здесь близость функций и их графиков оценивается по их различию в точке x_0.

Сходимость последовательности (5.8) к предельной функции $s(x)$ в точке x_0 означает, что графики функций (5.8) над точкой x_0 приближаются к графику функции $s(x)$ (рис. 3). Это значит в свою очередь, что расстояние

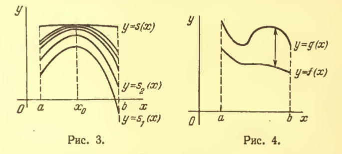


Рис. 3. Рис. 4.

между функцией $s_n(x)$ и предельной функцией $s(x)$ в смысле выражения (5.9) по мере роста n стремится к нулю:

$$\lim_{n\to\infty} |s_n(x) - s(x)| = 0. \tag{5.10}$$

Таким образом, «сходимость в точке x_0» соответствует расстоянию, определяемому выражением (5.9).

Область сходимости последовательности (5.8) к функции $s(x)$ будет состоять из всех тех x_0, для которых выполняется равенство (5.10), т. е. для тех абсцисс, для которых графики функций из последовательности неограниченно приближаются к графику функции $s(x)$.

Вместе с тем расстояние между функциями $f(x)$ и $g(x)$ можно описывать не выражением (5.9), а иначе. Например, за расстояние между функциями можно принимать максимальную разность между соответствующими значениями функций

$$\max_x |f(x) - g(x)| \tag{5.11}$$

(рис. 4). В тех случаях, когда написанный максимум не достигается, вместо него следует рассматривать точ-

ную верхнюю границу значений $|f(x)-g(x)|$. (Напомним, что точной верхней границей будет в этом случае число, которое не меньше каждого из модулей разностей и к которому значения этих модулей разностей подходят сколь угодно близко.)

Приближение в смысле так определенного расстояния функций из последовательности (5.8) к функции $s(x)$ означает, что

$$\lim_{n\to\infty} \max_x |s_n(x)-s(x)|=0,$$

т. е. каково бы ни было $\varepsilon>0$, начиная с некоторого n будет

$$\max_x |s_n(x)-s(x)|<\varepsilon.$$

Иными словами, каково бы ни было $\varepsilon>0$, начиная с некоторого n, *при любом* x будет

$$|s_n(x)-s(x)|<\varepsilon.$$

Это и было выше определено как равномерная сходимость последовательности (5.8) к функции $s(x)$ на промежутке от a до b.

Геометрически равномерная сходимость означает неограниченное приближение графиков функций $s_n(x)$ к графику (x) в местах их наибольшего взаимного удаления. В остальных местах графики $s_n(x)$ будут подходить к графику $s(x)$ еще теснее.

Замечание. Каждая функция последовательности (5.7) может, в частности, быть постоянной. В этом случае последовательность функций превращается в числовую последовательность

$$s_1, \; s_2, \; \ldots, \; s_n, \; \ldots \tag{5.12}$$

Предположим, что эта последовательность сходится к пределу s. Это значит, что по каждому $\varepsilon>0$ найдется такое n_0, что при $n>n_0$

$$|s_n-s|<\varepsilon.$$

Находимое так n_0 никак не зависит от какого бы то ни было x. Поэтому мы с полным основанием можем считать, что последовательность (5.12), т. е. числовой ряд, сходится равномерно для всех значений x.

Пример. Последовательность функций

$$x,\ x^2,\ x^3,\ \ldots,\ x^n,\ \ldots \tag{5.13}$$

сходится к предельной функции $s(x)\equiv 0$ в точке $x=1/2$. Действительно,

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n=0.$$

Мы можем утверждать также, что рассматриваемая последовательность функций сходится к предельной — функции $s(x)\equiv 0$ для всех $0\leqq x<1$, ибо действительно, для любого x_0 из $[0,\ 1)$ по всякому $\varepsilon>0$ найдется такое n_0, что для $n\geqq n_0$

$$x_0^n<\varepsilon.$$

Заметим, однако, что по мере приближения x_0 к единице для каждого данного ε приходится брать все большие и большие значения n_0: степени по мере приближения оснований к единице убывают все медленнее и медленнее. Достаточно сравнить, например, последовательности

$$0{,}1;\ 0{,}01;\ 0{,}001;\ \ldots$$

и

$$0{,}9;\ 0{,}81;\ 0{,}729;\ \ldots$$

Это наводит нас на мысль, что в данном случае по $\varepsilon>0$ нельзя найти такого n_0, что при любом $0\leqq x_0<1$ для $n>n_0$ будет

$$x_0^n<\varepsilon.$$

Такая мысль верна. В самом деле, предположим, что по какому-то ε (пусть для конкретности будет $\varepsilon=0{,}1$) такое n_0, годное для всех x_0, нашлось. Это значит, что

$$x_0^{n_0}<0{,}1$$

для всех x_0 из $[0,\ 1)$. Но этого не может быть, так как в действительности последнее неравенство выполняется не для всех x_0, а лишь для тех, для которых

$$x<\sqrt[n_0]{0{,}1}.$$

Следовательно, сходимость последовательностей функций (5.13) к предельной функции $s(x)\equiv 0$, хотя и имеет место для любого x из $[0,\ 1)$, но не является равномерной сходимостью для $0\leqq x<1$.

К этому же выводу можно прийти и из геометрических соображений. Рассмотрим графики функций, составляющих последовательность (5.13), и график предельной функции $s(x)\equiv 0$ (рис. 5).

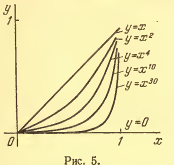


Рис. 5.

Ввиду того, что

$$|x^n-0|=x^n,$$

точной верхней границей значений x^n при x из $[0, 1)$ будет 1. Таким образом, определяемое выражением (5.11) расстояние между любым членом x^n последовательности и функцией $s(x)$ будет равно 1. Значит, и предел этих расстояний будет равен 1, а не нулю, как это нужно было бы для равномерной сходимости.

По существу, «настоящей» сходимостью функции в той или иной области является именно ее равномерная сходимость в этой области. В условиях равномерной сходимости функций при переходе к пределу сохраняются основные свойства функций, их интегралов и производных.

Почти очевидна следующая теорема.

Теорема. *Если каждая из последовательностей функций*

$$s_1(x),\ s_2(x),\ \ldots,\ s_n(x),\ \ldots \tag{5.14}$$

и

$$t_1(x),\ t_2(x),\ \ldots,\ t_n(x),\ \ldots \tag{5.15}$$

сходится к своим предельным функциям $s(x)$ *и* $t(x)$ *равномерно в некоторой области, то равномерно в этой же области будет сходиться и последовательность сумм*

$$(s_1(x)+t_1(x)),\ (s_2(x)+t_2(x)),\ \ldots,\ (s_n(x)+t_n(x)),\ \ldots \tag{5.16}$$

и ее пределом будет функция $s(x)+t(x)$.

Доказательство. Возьмем произвольное $\varepsilon>0$ и найдем такие n_1 и n_2, что для $n\geqq n_1$

$$|s(x)-s_n(x)|<\frac{\varepsilon}{2} \tag{5.17}$$

и для $n \geqq n_2$

$$|t(x) - t_n(x)| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad (5.18)$$

при всех x. В силу равномерной сходимости последовательностей (5.14) и (5.15) это сделать можно. Если взять n превосходящим как n_1, так и n_2, то оба неравенства — (5.17) и (5.18) — будут выполняться.

Сложив эти неравенства, мы получим

$$\varepsilon > |s(x) - s_n(x)| + |t(x) - t_n(x)| \geqq$$
$$\geqq |s(x) - s_n(x) + t(x) - t_n(x)| =$$
$$= |(s(x) + t(x)) - (s_n(x) + t_n(x))|$$

по-прежнему при всех x. Это означает равномерную сходимость последовательности (5.16).

§ 4. Предел последовательности непрерывных функций

Теорема. *Если последовательность непрерывных на сегменте $[a, b]$ функций*

$$s_1(x), \ s_2(x), \ldots, \ s_n(x), \ldots$$

сходится на сегменте $[a, b]$ к предельной функции $s(x)$ равномерно, то предельная функция $s(x)$ также непрерывна на этом сегменте.

Доказательство. Непрерывность функции $s(x)$ в точке x_0 (которую нам предстоит доказывать) состоит в том, что по любому $\varepsilon > 0$ можно найти такое δ, что из $|h| < \delta$ следует

$$|s(x_0 + h) - s(x_0)| < \varepsilon$$

(если, разумеется, число $x_0 + h$ расположено в сегменте $[a, b]$).

Мы имеем для любых x_0, h и n:

$$|s(x_0 + h) - s(x_0)| =$$
$$= |s(x_0 + h) - s_n(x_0 + h) + s_n(x_0 + h) - s_n(x_0) +$$
$$+ s_n(x_0) - s(x_0)| \leqq |s(x_0 + h) - s_n(x_0 + h)| +$$
$$+ |s_n(x_0 + h) - s_n(x_0)| + |s_n(x_0) - s(x_0)|. \qquad (5.19)$$

На основании равномерной сходимости можно взять столь большое n, чтобы для любого x из сегмента $[a, b]$ выполнялось

$$|s(x) - s_n(x)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

В частности, будет и

$$|s(x_0 + h) - s_n(x_0 + h)| < \frac{\varepsilon}{3}, \tag{5.20}$$

$$|s_n(x_0) - s(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{5.21}$$

Итак, пусть нужное n выбрано. По условию функция $s_n(x)$ является непрерывной. Следовательно, найдется такое δ, что при любом $|h| < \delta$

$$|s_n(x_0 + h) - s_n(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{5.22}$$

Сопоставляя (5.19), (5.20), (5.21) и (5.22), мы видим, что

$$|s(x_0 + h) - s(x_0)| < \varepsilon.$$

Теорема доказана.

§ 5. Переход к пределу под знаком интеграла

Теорема. *Если последовательность непрерывных на сегменте* $[a, b]$ *функций*

$$s_1(x),\ s_2(x), \ldots,\ s_n(x), \ldots \tag{5.23}$$

сходится равномерно в этом сегменте к предельной функции $s(x)$, *то при любых* $a \leq \alpha \leq \beta \leq b$

$$\lim_{n \to \infty} \int_\alpha^\beta s_n(x)\, dx = \int_\alpha^\beta s(x)\, dx. \tag{5.24}$$

Доказательство. Заметим прежде всего, что в наших условиях предельная функция $s(x)$ является непрерывной (см. § 4), и потому интеграл

$$\int_\alpha^\beta s(x)\, dx$$

имеет смысл.

Ввиду обусловленной равномерной сходимости последовательности (5.23) к предельной функции $s(x)$ по любому $\varepsilon > 0$ найдется такое n_0, что при $n \geqq n_0$ для любого $a \leqq x \leqq b$ будет выполняться неравенство

$$|s(x) - s_n(x)| < \frac{\varepsilon}{b-a}.$$

Поэтому

$$\left|\int_\alpha^\beta s_n(x)\,dx - \int_\alpha^\beta s(x)\,dx\right| = \left|\int_\alpha^\beta (s_n(x) - s(x))\,dx\right| \leqq$$
$$\leqq \int_\alpha^\beta |s_n(x) - s(x)|\,dx < \int_\alpha^\beta \frac{\varepsilon}{b-a}\,dx = \varepsilon\frac{\beta-\alpha}{b-a} \leqq \varepsilon.$$

Таким образом, по произвольному $\varepsilon > 0$ нашлось такое n_0, что при $n \geqq n_0$

$$\left|\int_\alpha^\beta s_n(x)\,dx - \int_\alpha^\beta s(x)\,dx\right| < \varepsilon,$$

а это и означает сходимость (5.24).

Следствие (предельный переход под знаком интеграла с переменным верхним пределом). *Если последовательность непрерывных в сегменте* $[a,\ b]$ *функций* (5.23) *сходится равномерно в этом сегменте к предельной функции* $s(x)$, *то при любом* x *из этого же сегмента последовательность интегралов*

$$\int_\alpha^x s_1(x)\,dx,\quad \int_\alpha^x s_2(x)\,dx, \ldots,\quad \int_\alpha^x s_n(x)\,dx, \ldots \qquad (5.25)$$

с переменным верхним пределом, как последовательность функций сходится к функции

$$\int_\alpha^x s(x)\,dx \qquad (5.26)$$

равномерно для всех x *из сегмента* $[a,\ b]$.

Доказательство. Мы можем положить в доказательстве теоремы $\beta = x$ и получить тем самым сходимость последовательности интегралов (5.25) к интегралу (5.26). Поскольку выбор по $\varepsilon > 0$ соответствующего n_0 в условиях теоремы не зависит от β (или, в условиях следствия, от x), эта сходимость оказывается равномерной.

§ 6. Переход к пределу под знаком производной

Теорема. *Пусть последовательность функций*

$$s_1(x),\ s_2(x),\ \ldots,\ s_n(x),\ \ldots \tag{5.27}$$

сходится в сегменте $[a, b]$ *к предельной функции* $s(x)$. *Пусть, далее, функции из последовательности* (5.27) *имеют непрерывные производные, последовательность которых*

$$s_1'(x),\ s_2'(x),\ \ldots,\ s_n'(x),\ \ldots$$

сходится к некоторой предельной функции $\sigma(x)$ *равномерно во всем сегменте* $[a, b]$.

Тогда

1) $$\frac{d}{dx} s(x) = \sigma(x);$$

2) *последовательность* (5.27) *сходится к своей предельной функции* $s(x)$ *равномерно.*

Доказательство. *Пусть* $a \leq \alpha < x \leq b$. На основании предыдущей теоремы (о переходе к пределу под знаком интеграла) мы имеем

$$\lim_{n \to \infty} \int_\alpha^x s_n'(x)\,dx = \int_\alpha^x \sigma(x)\,dx.$$

Но, с другой стороны,

$$\lim_{n \to \infty} \int_\alpha^x s_n'(x)\,dx = \lim_{n \to \infty} (s_n(x) - s_n(\alpha)) = s(x) - s(\alpha),$$

так что

$$s(x) - s(\alpha) = \int_\alpha^x \sigma(x)\,dx.$$

Дифференцируя это равенство (при этом интеграл справа дифференцируется по его переменному верхнему пределу), мы получаем

$$\frac{d}{dx} s(x) = \sigma(x),$$

и часть 1) доказана.

Для доказательства 2) напишем тождество

$$s_n(x) = s_n(\alpha) + \int_\alpha^x s_n'(x)\,dx.$$

Как уже отмечалось (см. § 3), для доказательства равномерной сходимости последовательности сумм достаточно установить равномерную сходимость последовательностей, составленных из слагаемых, т. е. в данном случае последовательностей

$$s_1(\alpha),\ s_2(\alpha),\ \ldots,\ s_n(\alpha),\ \ldots$$

и

$$\int_\alpha^x s_1'(x)\,dx,\quad \int_\alpha^x s_2'(x)\,dx,\ \ldots,\ \int_\alpha^x s_n'(x)\,dx,\ \ldots$$

Но первая из этих последовательностей сходится равномерно на основании замечания в § 3, а вторая — в силу следствия теоремы § 5.

§ 7. Определение равномерной сходимости функционального ряда и признак Вейерштрасса

Определение. Функциональный ряд

$$u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x) + \ldots$$

называется *сходящимся* в некоторой области D *равномерно*, если в этой области последовательность его частичных сумм

$$s_1(x),\ s_2(x),\ \ldots,\ s_n(x),\ \ldots$$

сходится равномерно к своей предельной функции $s(x)$.

Весьма удобный признак равномерной сходимости функционального ряда был предложен Вейерштрассом. Этот признак имеет вид следующей теоремы.

Теорема. *Функциональный ряд*

$$u_1(x)+u_2(x)+\ldots+u_n(x)+\ldots, \qquad (5.28)$$

каждый член которого является функцией, определенной на сегменте $[a, b]$, сходится равномерно на этом сегменте, если существует такая последовательность

$$c_1, c_2, \ldots, c_n, \ldots$$

положительных постоянных, что

$$|u_n(x)| \leq c_n \qquad (5.29)$$

для любого x из $[a, b]$ и любого $n=1, 2, \ldots$, а ряд

$$c_1+c_2+\ldots+c_n \ldots \qquad (5.30)$$

сходится.

Иногда в условиях этой теоремы функциональный ряд (5.28) называется *мажорируемым*, числовой ряд (5.30) — *мажорирующим*, а сама теорема — *теоремой о мажорировании*.

Доказательство. Из (5.29) и (5.30) мы на основании признака сравнения (см. § 2 главы 3) можем заключить о сходимости функционального ряда (5.28) в каждой точке сегмента $[a, b]$. Это значит, что мы можем говорить о сумме функционального ряда (5.28) как о функции $S(x)$, определенной для каждого x из этого сегмента.

В силу сходимости ряда (5.30) (обозначим его сумму через S) возьмем теперь произвольное $\varepsilon>0$ и найдем по нему такое n_0, что при $n \geqq n_0$

$$S-(c_1+c_2+\ldots+c_n)<\varepsilon,$$

т. е.

$$c_{n+1}+c_{n+2}+\ldots<\varepsilon. \qquad (5.31)$$

Напишем для этого n

$$s_n(x)+r_n(x)=s(x),$$

где

$$r_n(x)=u_{n+1}(x)+u_{n+2}(x)+\ldots \qquad (5.32)$$

Из (5.29), (5.31) и (5.32) следует, что

$$r_n(x) \leqq \varepsilon$$

при любых $n \geqq n_0$ и x из рассматриваемого сегмента. Таким образом, мы по каждому ε находим такое n_0, что при $n \geqq n_0$ имеет место

$$|s_n(x) - s(x)| < \varepsilon$$

для любого x. Это и означает равномерную сходимость ряда.

Пример. Функциональный ряд

$$\frac{\sin 1^2 x}{1^2} + \frac{\sin 2^2 x}{2^2} + \ldots + \frac{\sin n^2 x}{n^2} + \ldots$$

сходится равномерно для всех вещественных x, потому что при всех x и n

$$\left|\frac{\sin n^2 x}{n^2}\right| \leqq \frac{1}{n^2},$$

а ряд

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} + \ldots,$$

как известно, сходится.

§ 8. Непрерывность суммы равномерно сходящегося ряда с непрерывными членами

Теорема. *Пусть все члены функционального ряда*

$$u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x) + \ldots \qquad (5.33)$$

определены на сегменте $[a, b]$, *непрерывны на нем и составленный из них функциональный ряд сходится на этом отрезке равномерно.*

Тогда суммой ряда (5.33) *будет функция, непрерывная на сегменте* $[a, b]$.

Доказательство. Из непрерывности членов функционального ряда (5.33) следует непрерывность каждой из его частичных сумм

$$s_1(x),\ s_2(x),\ \ldots,\ s_n(x),\ \ldots,$$

по условию эта последовательность частичных сумм сходится равномерно к предельной функции $s(x)$, являющейся суммой ряда (5.33). Следовательно, на основании теоремы § 4 функция $s(x)$ также должна быть непрерывной.

§ 9. Почленное интегрирование функциональных рядов

Теоремы о почленном дифференцировании и интегрировании равномерно сходящихся последовательностей непосредственно приводят к теоремам о почленном дифференцировании и интегрировании равномерно сходящихся рядов.

Теорема (о почленном интегрировании рядов). *Если функциональный ряд*

$$u_1(x)+u_2(x)+\ldots+u_n(x)+\ldots \qquad (5.34)$$

сходится равномерно на некотором сегменте $[a, b]$ и имеет суммой функцию $s(x)$, то ряд интегралов

$$\int_\alpha^\beta u_1(x)\,dx+\int_\alpha^\beta u_2(x)\,dx+\ldots+\int_\alpha^\beta u_n(x)\,dx+\ldots \qquad (5.35)$$

(здесь, как и раньше, $a\leqq\alpha\leqq\beta\leqq b$) также сходится равномерно на этом сегменте и имеет суммой функцию

$$\int_\alpha^\beta s(x)\,dx.$$

Доказательство. Пусть $s_n(x)$ — n-я частичная сумма ряда (5.34). Тогда

$$\int_\alpha^\beta s_n(\ x)\,d=\int_\alpha^\beta (u_1(x)+\ldots+u_n(x))\,dx \qquad (5.36)$$

будет, очевидно, n-й частичной суммой ряда (5.35).

По условию теоремы последовательность

$$s_1(x),\ s_2(x),\ \ldots,\ s_n(x),\ \ldots$$

частичных сумм ряда (5.34) сходится на сегменте $[a, b]$ равномерно. Следовательно, на основании теоремы о предельном переходе под знаком интеграла с переменным верхним пределом (следствие из § 5) последовательность интегралов

$$\int_\alpha^x s_1(x)\,dx,\quad \int_\alpha^x s_2(x)\,dx,\ \ldots,\quad \int_\alpha^x s_n(x)\,dx,\ \ldots \qquad (5.37)$$

также сходится равномерно и имеет пределом

$$\int_{\alpha}^{x} s(x)\,dx. \tag{5.38}$$

Но ввиду (5.36) интегралы (5.37) являются частичными суммами ряда (5.35). Тем самым доказаны равномерная сходимость ряда (5.35) и равенство его суммы интегралу (5.38).

Переход от ряда (5.34) и его суммы к ряду (5.35) и его сумме называется *почленным интегрированием ряда*.

Пример. Функциональный ряд

$$1-x^2+x^4-x^6+\ldots+(-1)^n x^{2n}+\ldots \tag{5.39}$$

сходится равномерно при $|x| \leq \alpha < 1$ и, как легко видеть (наш ряд является геометрической прогрессией), сумма его равна

$$\frac{1}{1+x^2}.$$

Следовательно, получаемый почленным интегрированием ряда (5.39) от 0 до $x < 1$ ряд

$$x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\ldots$$

также равномерно сходится при $|x| \leq \alpha < 1$, и его сумма равна

$$\int_0^x \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x \Big|_0^x = \operatorname{arctg} x.$$

В качестве второго примера почленного интегрирования ряда можно вспомнить выведенную в § 5 главы 1 формулу

$$x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\ldots+\frac{x^{n+1}}{n+1}+\ldots=-\ln(1-x).$$

§ 10. Почленное дифференцирование функциональных рядов

Теорема (о почленном дифференцировании рядов). *Пусть ряд*

$$u_1(x)+u_2(x)+\ldots+u_n(x)+\ldots \tag{5.40}$$

сходится на сегменте $[a, b]$, *имеет сумму* $s(x)$, *а его члены имеют на этом сегменте непрерывные производные, причем составленный из этих производных ряд*

$$u_1'(x)+u_2'(x)+\ldots+u_n'(x)+\ldots \qquad (5.41)$$

сходится на $[a, b]$ *равномерно и имеет сумму* $\sigma(x)$.

Тогда ряд (5.40) *сходится на* $[a, b]$ *равномерно и производная его суммы равна сумме ряда* (5.41):

$$\frac{d}{dx}s(x)=\sigma(x).$$

Доказательство. Пусть $s_n(x)$ — n-я частичная сумма ряда (5.40). Тогда

$$s_n'(x)=(u_1(x)+\ldots+u_n(x))'=u_1'(x)+\ldots+u_n'(x)$$

будет, очевидно, n-й частичной суммой ряда производных (5.41).

По условию теоремы последовательность

$$s_1(x),\ s_2(x),\ \ldots,\ s_n(x),\ldots \qquad (5.42)$$

частичных сумм ряда (5.40) сходится на сегменте $[a, b]$, а последовательность

$$s_1'(x),\ s_2'(x),\ \ldots,\ s_n'(x),\ \ldots \qquad (5.43)$$

частичных сумм также сходится на этом отрезке и притом равномерно.

Следовательно, на основании теоремы о переходе к пределу под знаком производной (см. § 6) последовательность (5.42) сходится равномерно и производная ее предела равна пределу последовательности (5.43).

Пример. Заменяя в ряде из примера § 9 переменную x на $-x$, мы получаем ряд

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\ldots+(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}+\ldots$$

Из него без труда получается, что

$$x\ln(1+x)=x^2-\frac{x^3}{2}+\frac{x^4}{3}-\ldots+(-1)^{n+1}\frac{x^{n+1}}{n}+\ldots \qquad (5.44)$$

Справа здесь стоит некоторый ряд. Продифференцировав его почленно, мы получим

$$2x-\frac{3x^2}{2}+\frac{4x^3}{3}-\ldots+(-1)^{n+1}\frac{(n+1)\,x^n}{n}+\ldots$$

Поскольку здесь

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\left|\frac{\dfrac{n+2}{n+1}\,x^{n+1}}{\dfrac{n+1}{n}\,x^n}\right|=\frac{(n+1)^2-1}{(n+1)^2}\,x,$$

этот ряд сходится абсолютно и равномерно для всех $|x|\leqq a<1$. Следовательно, написанный ряд производных сходится к производной от суммы ряда (5.44):

$$2x-\frac{3x^2}{2}+\frac{4x^3}{3}-\ldots+(-1)^{n+1}\frac{(n+1)\,x^n}{n}+\ldots=$$
$$=\frac{x}{1+x}+\ln(1+x). \qquad (5.45)$$

Эта сходимость равномерная при всех $|x|\leqq\alpha<1$.

ГЛАВА 6

СТЕПЕННЫЕ РЯДЫ. ОБЩИЕ ВОПРОСЫ

§ 1. Определение степенного ряда

Определение. Функциональный ряд вида

$$a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_n z^n + \ldots, \qquad (6.1)$$

где a_0, a_1, a_2, ... не зависят от переменной z, называется *степенным относительно переменной* z рядом. Числа a_0, a_1, a_2, ... называются *коэффициентами* этого ряда.

Так как обычно бывает ясно, по какой переменной функциональный ряд является степенным, мы будем впредь говорить просто о степенных рядах.

Как и в случае общих функциональных рядов, можно говорить о вещественных и о комплексных степенных рядах.

Именно, если переменная z может принимать комплексные (и в том числе вещественные) значения, а коэффициенты ряда — комплексные числа, то степенной ряд называется *комплексным*.

Если же значения z могут быть только вещественными, а коэффициенты ряда — тоже вещественные числа, то степенной ряд называется *вещественным*.

Промежуточный случай, когда значения z должны быть вещественными, а коэффициенты ряда могут быть комплексными ($a_n = b_n + ic_n$), не представляет большого интереса: обычно в этом случае всю нужную информацию о ряде

$$(b_0 + ic_0) + (b_1 + ic_1) z + \ldots + (b_n + ic_n) z^n + \ldots$$

можно получить, рассматривая порознь два вещественных ряда

$$b_0 + b_1 z + \ldots + b_n z^n + \ldots$$

и

$$c_0 + c_1 z + \ldots + c_n z^n + \ldots$$

Далее в этой и в следующих главах мы будем рассматривать как комплексные, так и вещественные степенные ряды. Разумеется, что каждый раз, когда это необходимо, мы будем оговаривать, с какой областью значений переменных мы имеем дело. Кроме того, как это обычно принято, переменная, принимающая комплексные значения, будет обозначаться буквой z, а переменная, принимающая только вещественные значения, — буквой x.

При тех или иных конкретных значениях z_0, принимаемых переменной z, ряд (6.1) превращается в числовой ряд

$$a_0 + a_1 z_0 + \ldots + a_n z_0^n + \ldots, \tag{6.2}$$

члены которого, вообще говоря, комплексные числа.

Определение. Числовой ряд (6.2) сходится *абсолютно*, если сходится ряд

$$|a_0| + |a_1 z_0| + \ldots + |a_n z_0^n| + \ldots,$$

составленный из модулей членов ряда (6.2).

Очевидно, сформулированное определение абсолютной сходимости совпадает с приведенным в § 1 главы 4.

§ 2. Теорема Абеля

Области сходимости степенных рядов устроены довольно просто. Они описываются следующей теоремой.

Теорема Абеля. *Если степенной ряд*

$$a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n + \ldots \tag{6.3}$$

сходится при некотором $z = z_0$, то он сходится абсолютно при всех значениях z, для которых

$$|z| < |z_0|.$$

Наоборот, если ряд (6.3) *расходится при* $z=z_0$, *то он расходится при всех значениях* z, *для которых*

$$|z|>|z_0|.$$

Доказательство. Предположим сначала, что числовой ряд

$$a_0+a_1z_0+\ldots+a_nz_0^n+\ldots$$

сходится. В этом случае, как было установлено ранее (см. § 6 главы 2)

$$\lim_{n\to\infty} a_nz_0^n=0.$$

Тем более, члены этого ряда ограничены, т. е. найдется такое K, что при любом номере n

$$|a_nz_0^n|<K.$$

Пусть теперь $|z|<|z_0|$ (тем самым мы предполагаем, что $z_0\neq 0$). Тогда

$$q=\left|\frac{z}{z_0}\right|<1.$$

Мы имеем

$$|a_nz^n|=\left|a_nz_0^n\frac{z^n}{z_0^n}\right|=|a_nz_0^n|\left|\frac{z}{z_0}\right|^n=|a_nz_0^n|\,q^n<Kq^n.$$

Это значит, что при $|z|<|z_0|$ члены ряда

$$|a_0|+|a_1z|+\ldots+|a_nz^n|+\ldots, \qquad (6.4)$$

начиная с некоторого места, становятся меньше соответствующих членов геометрической прогрессии

$$K+Kq+\ldots+Kq^{n-1}+\ldots,$$

в которой знаменатель меньше единицы. Так как такая прогрессия сходится, ряд (6.4) также должен сходиться. Но это означает, что ряд

$$a_0+a_1z+\ldots+a_nz^n+\ldots$$

сходится абсолютно.

Предположим теперь, что ряд

$$a_0+a_1z_0+\ldots+a_nz_0^n+\ldots \qquad (6.5)$$

расходится. Будем доказывать вторую часть теоремы от противного. Возьмем некоторое z, для которого $|z| > |z_0|$, и допустим, что ряд

$$a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n + \ldots$$

сходится. Но тогда из сходимости этого ряда, согласно первой части теоремы, должен сходиться и ряд (6.5), что противоречит предположенному.

§ 3. Круг сходимости ряда

Теперь мы можем достаточно точно описать области сходимости степенных рядов.

Рассмотрим все значения z, при которых степенной ряд

$$a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n + \ldots \qquad (6.6)$$

расходится. Пусть R — точная нижняя граница модулей этих чисел (иными словами, число R таково, что для любого z, для которого $|z| < R$, ряд (6.6) уже сходится; такое число существует, потому что всякая убывающая последовательность модулей ограничена снизу (нулем)). Тогда по доказанному в § 2 при $|z| > R$ ряд (6.6) расходится, а по определению числа R при $|z| < R$ ряд (6.6) сходится.

Таким образом, для каждого степенного ряда существует такое вещественное неотрицательное число R, что при $|z| < R$ ряд

$$a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n + \ldots$$

сходится, а при $|z| > R$ расходится.

Множество всех комплексных чисел, для которых $|z| < R$, образует на плоскости комплексных чисел круг радиуса R с центром в точке 0. Этот круг называется *кругом сходимости* данного ряда.

Радиус R круга сходимости называется *радиусом сходимости*.

Заметим, что, говоря о круге сходимости ряда, мы имеем в виду сходимость ряда для всех точек внутри круга и расходимость его для всех точек, лежащих вне круга. Вопрос же о поведении ряда для тех значений z, которые лежат на самой окружности, является значительно

более деликатным, и ответ на него обычно связан с более или менее сложным анализом индивидуальных свойств конкретного ряда.

Пример. Рассмотрим ряд

$$-z+\frac{1}{2}z^2-\frac{1}{3}z^3+\ldots+(-1)^n\frac{1}{n}z^n+\ldots \tag{6.7}$$

При $z=-1$ мы получаем гармонический ряд

$$1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots,$$

который расходится. Следовательно, по второй части теоремы Абеля радиус сходимости этого ряда не превосходит единицы: $R\leq 1$.

С другой стороны, при $z=1$ мы из (6.7) получаем знакопеременный ряд

$$-1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\ldots+(-1)^n\frac{1}{n}+\ldots,$$

который сходится. Следовательно, по первой части теоремы Абеля радиус сходимости ряда (6.7) не меньше единицы: $R\geq 1$.

Объединяя сказанное, мы получаем, что радиус сходимости ряда (6.7) равен единице: $R=1$.

Нам остается выяснить сходимость ряда (6.7) на самом круге сходимости, т. е. для тех значений z, для которых

$$|z|=1.$$

Возьмем такое z и представим его в тригонометрической форме:

$$z=\cos\varphi+i\sin\varphi.$$

Ряд (6.7) при этом приобретает вид

$$\left(-\cos\varphi+\frac{1}{2}\cos 2\varphi-\frac{1}{3}\cos 3\varphi+\ldots\right)+ \\ +i\left(-\sin\varphi+\frac{1}{2}\sin 2\varphi-\frac{1}{3}\sin 3\varphi+\ldots\right).$$

Как было обнаружено в § 7 главы 1 при помощи довольно специфических вычислений, ряд

$$\sin\varphi-\frac{1}{2}\sin 2\varphi+\frac{1}{3}\sin 3\varphi-\ldots$$

при всех $-\pi<\varphi<\pi$ сходится и имеет суммой $1/2\varphi$. В силу аналогичных соображений при всех $-\pi<\varphi<\pi$ сходится и ряд

$$\cos\varphi-\frac{1}{2}\cos 2\varphi+\frac{1}{3}\cos 3\varphi-\ldots$$

и тем самым ряд (6.7).

Таким образом, интересующий нас ряд сходится во всех точках окружности круга сходимости, за исключением точки $z=-1$.

Круг сходимости ряда может состоять из единственной точки (в этом случае радиус сходимости ряда равен нулю) или, напротив, охватывает всю плоскость комплексного переменного (в этом случае принято говорить, что радиус сходимости ряда *бесконечен*).

Примеры.

1. При любом $z \neq 0$ ряд

$$0!+1!\,z+2!\,z^2+\ldots+n!\,z^n+\ldots$$

расходится (см. пример 5 § 2 главы 5). Следовательно, радиус сходимости этого ряда равен нулю.

2. При любом z ряд

$$\frac{1}{0!}+\frac{z}{1!}+\frac{z^2}{2!}+\ldots+\frac{z^n}{n!}+\ldots$$

сходится (см. пример 4 § 2 главы 5). Следовательно, радиус сходимости этого ряда можно принять равным бесконечности.

§ 4. Вещественный степенной ряд и его интервал сходимости

Если ряд

$$a_0+a_1x+\ldots+a_nx^n+\ldots \tag{6.8}$$

имеет вещественные коэффициенты и переменная x принимает только вещественные значения, то теорема Абеля приводит нас к следующему утверждению:

Существует такое неотрицательное R, что при $x>R$ или $x<-R$ ряд (6.8) *расходится, при $-R<x<R$ — сходится, а поведение ряда при $x=\pm R$ подлежит дальнейшему анализу.*

Область значений переменной x, удовлетворяющих соотношению

$$-R<x<R,$$

называется в случае вещественного ряда его *интервалом сходимости*. За числом R, как и в комплексном случае, сохраняется название *радиуса сходимости*.

§ 5. Равномерная сходимость ряда в круге его сходимости

Теорема. *Степенной ряд сходится равномерно в любом замкнутом круге, содержащемся в его круге сходимости.*

Доказательство. Пусть

$$a_0+a_1z+\ldots+a_nz^n+\ldots \tag{6.9}$$

— степенной ряд и R — его радиус сходимости. Возьмем произвольный замкнутый круг, лежащий внутри круга сходимости. Очевидно, можно считать, что центр меньшего круга также находится в точке 0. (Точнее говоря, всякий меньший круг можно охватить кругом с центром в точке 0 и целиком содержащимся в круге сходимости; равномерная сходимость ряда в охватывающем круге влечет равномерную сходимость и в меньшем круге.) Пусть R_1 — его радиус. Возьмем точку z_0, лежащую в кольце между нашими двумя кругами. Так как эта точка расположена внутри круга сходимости степенного ряда (6.9), ряд

$$a_0+a_1z_0+\ldots+a_nz_0^n+\ldots$$

сходится абсолютно. Но при любом z_1 из меньшего круга должно быть $|z_1|<|z_0|$. Поэтому

$$|a_nz_1^n|=|a_n||z_1|^n<|a_n||z_0|^n=|a_nz_0^n|.$$

Следовательно, по признаку Вейерштрасса (см. § 7 главы 5) ряд

$$a_0+a_1z+\ldots+a_nz^n+\ldots$$

сходится в меньшем круге равномерно.

Теорема (о непрерывности суммы ряда). *Внутри круга сходимости ряда сумма ряда является непрерывной функцией.*

Доказательство. Каждая частичная сумма степенного ряда, очевидно, есть непрерывная функция. Поскольку по предыдущему в любой замкнутой области внутри круга сходимости ряда сходимость является равномерной, сумма ряда, являющаяся пределом равномерно сходящейся последовательности непрерывных функций, на основании сказанного в § 4 главы 5 сама является непрерывной функцией.

Доказанные теоремы открывают возможности почленного интегрирования и дифференцирования степенных рядов. Мы обсудим эти возможности раздельно для случаев вещественных и комплексных степенных рядов.

§ 6. Вещественные ряды

Теорема (о почленном интегрировании степенного ряда). *Если пределы интегрирования лежат внутри интервала сходимости степенного ряда, то последовательность интегралов от частичных сумм ряда сходится к интегралу от суммы ряда.*

Доказательство. Достаточно вспомнить, что внутри своего интервала сходимости ряд сходится равномерно, после чего сослаться на общую теорему § 9 главы 5.

Теорема о почленном дифференцировании функциональных рядов выглядела более слабой, чем теорема об их почленном интегрировании: в теореме о дифференцировании требовалась дополнительно сходимость ряда, составленного из производных членов. Для случая степенных рядов это условие внутри интервала сходимости выполняется автоматически, о чем свидетельствует следующая теорема.

Теорема (о почленном дифференцировании степенного ряда). *Пусть степенной ряд*

$$s(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n + \ldots \tag{6.10}$$

имеет радиус сходимости R. Тогда ряд

$$\sigma(x) = a_1 + 2a_2x + \ldots + na_nx^{n-1} + \ldots, \tag{6.11}$$

получаемый в результате почленного дифференцирования ряда (6.10), *также имеет радиус сходимости R.*

Производная суммы ряда (6.10) *равна сумме ряда* (6.11):

$$\frac{d}{dx}s(x) = \sigma(x).$$

Доказательство. Заметим, прежде всего, что вторая часть теоремы следует из первой ее части. Действительно, раз ряд (6.11) имеет радиус сходимости R, согласно теореме о равномерной сходимости, он сходится равномерно в любой замкнутой области интервала

сходимости ряда (6.10). Следовательно, мы можем сослаться на общую теорему о почленном дифференцировании функциональных рядов.

Нам остается найти радиус сходимости ряда (6.11). Пусть $|x_0| = \rho < R$. Возьмем произвольно $\rho < r < R$. Так как точка x_0 принадлежит интервалу сходимости ряда (6.10), числовой ряд

$$a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x_0^n + \ldots$$

сходится, и потому

$$\lim_{n \to \infty} |a_n x_0^n| = 0.$$

Это значит, что при любом $\varepsilon > 0$ для достаточно больших n

$$|a_n x_0^n| < \varepsilon.$$

Далее, мы имеем

$$|n a_n x_0^{n-1}| = \left| n a_n r^n \frac{1}{r} \frac{x_0^{n-1}}{r^{n-1}} \right| = n |a_n r^n| \frac{1}{r} \left| \frac{x_0^{n-1}}{r^{n-1}} \right| < \frac{n\varepsilon}{r} \left| \frac{x_0}{r} \right|^{n-1}.$$

Следовательно, члены ряда

$$a_1 + 2a_2 x_0 + \ldots + n a_n x_0^{n-1} + \ldots, \qquad (6.12)$$

начиная с некоторого места, становятся меньше соответствующих членов ряда

$$\frac{\varepsilon}{r} + \frac{2\varepsilon}{r} \left| \frac{x_0}{r} \right| + \ldots + \frac{n\varepsilon}{r} \left| \frac{x_0}{r} \right|^{n-1} + \ldots \qquad (6.13)$$

Применяя к последнему ряду признак сходимости Даламбера, мы получаем

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{n+1}{r} \varepsilon \left| \frac{x_0}{r} \right|^n}{\frac{n}{r} \varepsilon \left| \frac{x_0}{r} \right|^{n-1}} = \frac{n+1}{n} \frac{\rho}{r} \to \frac{\rho}{r} < 1.$$

Следовательно, ряд (6.13) сходится. Поэтому сходится и ряд (6.12). Значит, по теореме Абеля степенной ряд (6.12) сходится в круге радиуса r равномерно.

Но число r может быть выбрано сколь угодно близким к числу R. Это и означает, что радиус сходимости ряда (6.12) равен R.

§ 7. Комплексные ряды

Теорема о почленном интегрировании степенного ряда в комплексной области формулируется и доказывается практически так же, как и для случая вещественной области. Это объясняется тем, что интегралы в комплексной области имеют много общего с обычными интегралами (особенно, если сравнивать их с криволинейными интегралами).

Теорема. *Если степенной ряд сходится равномерно на некоторой кривой, то его можно интегрировать вдоль этой кривой почленно.*

Доказательство этой теоремы, как и доказательство аналогичной теоремы предыдущего параграфа, осуществляется непосредственно ссылкой на теорему § 9 главы 5.

Теорема о почленном дифференцировании степенного ряда в комплексной области является существенно более сложной, чем в вещественном случае. Мы ограничимся здесь лишь ее формулировкой.

Теорема. *Если комплексный степенной ряд сходится равномерно на некотором контуре, то внутри этого контура его можно почленно дифференцировать и притом сколько угодно раз.*

Пример. Рассмотренный нами в § 3 ряд

$$-z+\frac{1}{2}z^2-\ldots+(-1)^n\frac{1}{n}z^n+\ldots \qquad (6.14)$$

не сходится на всей окружности своего округа сходимости (именно, он расходится при $z=-1$). Тем более, он не сходится на этой окружности равномерно. Следовательно, мы не имеем права дифференцировать этот ряд почленно всюду в круге сходимости.

Вместе с тем этот ряд сходится равномерно в любой замкнутой области внутри своего круга сходимости и в том числе на любой окружности вида $|z|=\rho<1$. Следовательно, ряд (6.14) можно дифференцировать в его круге сходимости, отступая внутрь его сколь угодно мало.

§ 8. Разложение функций в степенные ряды

Сумма всякого сходящегося степенного ряда является некоторой функцией, определенной внутри круга сходимости этого ряда (а также, быть может, еще и в некоторых точках его границы).

В связи с этим возникают две задачи. Во-первых, можно по заданному ряду искать ту функцию, которой равна его сумма в области сходимости ряда. Эта задача называется суммированием сходящегося ряда. Во-вторых, можно по заданной функции искать сходящийся ряд того или иного типа, сумма которого в области сходимости равнялась бы заданной функции. Эта задача называется разложением функции в ряд.

Сейчас мы займемся вопросами разложения функций в степенные ряды. В дальнейшем будут рассматриваться также разложения функций в тригонометрические ряды, с одним примером которых мы уже познакомились в § 7 главы 1.

Наряду со степенными рядами относительно переменной z, т. е. рядами вида

$$a_0+a_1z+\ldots+a_nz^n+\ldots, \tag{6.15}$$

нам будет удобно рассматривать также ряды, степенные относительно переменной $z-a$, т. е. ряды вида

$$a_0+a_1(z-a)+\ldots+a_n(z-a)^n+\ldots \tag{6.16}$$

Ясно, что подстановкой $y=z-a$ второй из этих рядов превращается в первый. Поэтому если круг сходимости первого ряда состоит из всех точек, для которых $|z|\leq R$, то по тем же самым причинам круг сходимости второго ряда состоит из всех тех точек y, для которых $|y|\leq R$, т. е. $|z-a|\leq R$. Иными словами, на комплексной плоскости, на которой изображается независимая переменная z, круг сходимости ряда (6.16)

имеет тот же радиус R, что и круг сходимости ряда (6.15), а центр его расположен в точке a.

В частности, если ряды (6.15) и (6.16) вещественные, то интервал сходимости ряда (6.16) получается путем сдвига интервала сходимости ряда (6.15) на a вправо (очевидно, если $a < 0$, то фактически происходит сдвиг влево).

§ 9. Формула Тейлора

Напомним следующий факт, относящийся к дифференциальному исчислению.

Теорема. *Пусть функция $f(x)$ имеет в некотором сегменте непрерывные производные до $(n+1)$-го порядка включительно, а точка a находится внутри этого сегмента. Тогда для любого x из этого же сегмента имеет место формула Тейлора*

$$f(x) = f(a) + (x-a)\frac{f'(a)}{1!} + (x-a)^2\frac{f''(a)}{2!} + \ldots \\ \ldots + (x-a)^n \frac{f^{(n)}(a)}{n!} + R_n(x), \qquad (6.17)$$

где остаточный член $R_n(x)$ может быть записан в виде

$$R_n(x) = (x-a)^{n+1}\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \qquad (6.18)$$

(*форма Лагранжа*), *причем ξ лежит между a и x. Очевидно, число ξ можно записать также в виде $a + \theta(x-a)$, где $|\theta| < 1$.*

Доказательство. Пусть остаточный член $R_n(x)$ определяется равенством (6.17). Покажем, что он действительно имеет вид, описываемый в (6.18). С этой целью фиксируем значения a и x, введем новую переменную y и рассмотрим функцию

$$\varphi(y) = f(y) + (x-y)\frac{f'(y)}{1!} + (x-y)^2\frac{f'(y)}{2!} + \ldots \\ \ldots + (x-y)^n\frac{f^{(n)}(y)}{n!} + (x-y)^{n+1}\frac{R_n(x)}{(x-a)^{n+1}}.$$

Очевидно, между a и x функция $\varphi(y)$ непрерывна и дифференцируема.

Полагая $y=x$, мы непосредственно получаем

$$\varphi(x)=f(x), \tag{6.19}$$

а полагая $y=a$, мы имеем

$$\varphi(a)=f(a)+(x-a)\frac{f'(a)}{1!}+(x-a)^2\frac{f''(a)}{2!}+\ldots$$
$$\ldots+(x-a)^n\frac{f^{(n)}(a)}{n!}+(x-a)^{n+1}\frac{R_n(x)}{(x-a)^{n+1}}.$$

Согласно (6.17) правая часть этого равенства равна $f(x)$, так что

$$\varphi(a)=f(x). \tag{6.20}$$

Из (6.19) и (6.20) на основании теоремы Ролля для некоторого ξ, лежащего между a и x, должно быть

$$\varphi'(\xi)=0. \tag{6.21}$$

Но

$$\varphi'(y)=f'(y)-f'(y)+(x-y)\frac{f''(y)}{1!}-$$
$$-(x-y)\frac{f''(y)}{1!}+(x-y)^2\frac{f'''(y)}{2!}-$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$+(x-y)^n\frac{f^{(n+1)}(y)}{n!}-(n+1)\frac{R_n(x)}{(x-a)^{n+1}}(x-y)^n,$$

т. е.

$$\varphi'(y)=(x-y)^n\frac{f^{(n+1)}(y)}{n!}-(n+1)\frac{R_n(x)}{(x-a)^{n+1}}(x-y)^n,$$

и (6.21) переписывается как

$$(x-\xi)^n\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}-(n+1)\frac{R_n(x)}{(x-a)^{n+1}}(x-\xi)^n=0,$$

откуда

$$R_n(x)=(x-a)^{n+1}\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!},$$

а это и требовалось.

§ 10. Ряды Тейлора и Маклорена

Если функция $f(x)$ имеет в некотором сегменте производные всех порядков (раз они имеются все, каждая из них будет дифференцируемой и поэтому непрерывной), то можно написать формулу Тейлора для любого значения n.

Положим при любом $n = 1, 2, \ldots$

$$f(a) + (x-a)\frac{f'(a)}{1!} + \ldots + (x-a)^n \frac{f^{(n)}(a)}{n!} = S_n(x) \quad (6.22)$$

и

$$f(x) - S_n(x) = R_n(x).$$

Если

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0, \quad (6.23)$$

то ряд

$$f(a) + (x-a)\frac{f'(a)}{1!} + \ldots + (x-a)^n \frac{f^{(n)}(a)}{n!} + \ldots \quad (6.24)$$

сходится, и его суммой будет функция $f(x)$.

Определение. Представление функции $f(x)$ в виде ряда

$$f(x) = f(a) + (x-a)\frac{f'(a)}{1!} + \ldots + (x-a)^n \frac{f^{(n)}(a)}{n!} + \ldots$$

называется *разложением этой функции в ряд Тейлора.*

В частности, при $a = 0$ разложение в ряд Тейлора называется *разложением в ряд Маклорена*:

$$f(x) = f(0) + x\frac{f'(0)}{1!} + \ldots + x^n \frac{f^{(n)}(0)}{n!} + \ldots$$

Подчеркнем, что остаточный член в формуле Тейлора (6.17) для функции $f(x)$ не обязательно является остатком ряда Тейлора (6.24) этой функции. Поэтому из сходимости ряда Тейлора для функции $f(x)$ еще не следует его сходимость именно к этой функции.

Следовательно, при разложении функции в ряд Тейлора следует проверять соблюдение условия (6.23).

Пример. Приведем пример функций, ряды Тейлора которых сходятся, но не к самим функциям.

Возьмем произвольную функцию вида

$$\varphi(x)=\begin{cases} P\left(\frac{1}{x}\right)e^{-\frac{1}{x^2}}, & \text{если } x\neq 0, \\ 0, & \text{если } x=0, \end{cases} \tag{6.25}$$

где P — некоторый полином. Ясно, что при $x\neq 0$ и таком, что $1/x$ не корень P, должно быть и $\varphi(x)\neq 0$, так что функция $\varphi(x)$ во всяком случае тождественно нулю не равна.

Функция $\varphi(x)$ при $x\neq 0$, очевидно, непрерывна. Для проверки ее непрерывности при $x=0$ положим $1/x=y$. Тогда мы получим

$$\varphi(x)=P(y)\,e^{-y^2},$$

так что, применяя нужное число раз правило Лопиталя, мы будем иметь

$$\lim_{x\to 0}\varphi(x)=\lim_{y\to\infty}\frac{P(y)}{e^{y^2}}=0. \tag{6.26}$$

Значит, функция $\varphi(x)$ непрерывна и при $x=0$.

Найдем теперь производную функции $\varphi(x)$. При $x\neq 0$ мы можем ее получить дифференцированием соответствующего аналитического выражения:

$$\varphi'(x)=P'\left(\frac{1}{x}\right)\left(-\frac{1}{x^2}\right)e^{-\frac{1}{x^2}}+P\left(\frac{1}{x}\right)e^{-\frac{1}{x^2}}\frac{2}{x^3}=Q\left(\frac{1}{x}\right)e^{-\frac{1}{x^2}}, \tag{6.27}$$

где Q — некоторый полином.

Для вычисления значения производной при $x=0$ воспользуемся формулой Лагранжа:

$$\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x}=\varphi'(\theta x), \text{ где } 0<\theta<1.$$

(Применение формулы Лагранжа здесь законно, так как функция $\varphi(x)$ оказывается непрерывной, а при $x\neq 0$ и дифференцируемой.) Переходя в этом равенстве к пределу при стремлении x к нулю справа или слева, мы, как и при выводе (6.26), получаем (пара-

метр θ ограничен и нарушить сходимость аргумента к нулю не может)

$$\varphi'(0)=\lim_{x\to 0}\varphi'(x)=\lim_{x\to 0}\varphi'(\theta x)=\lim_{x\to 0}\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x}0. \quad (6.28)$$

Из (6.27) и (6.28) мы видим, что производная всякой функции вида (6.25) существует и сама имеет вид (6.25). Ее можно поэтому дифференцировать еще раз и снова получить функцию вида (6.25) и т. д. Таким образом, всякая функция вида (6.25) имеет производные сколь угодно высоких порядков и все они также имеют вид (6.25).

В частности,

$$\varphi(0)=\varphi'(0)=\ldots=\varphi^{(n)}(0)=0.$$

Поэтому в формуле Тейлора (6.22) для этой функции при $a=0$ мы имеем

$$S_n(x)=\varphi(0)+x\frac{\varphi'(0)}{1!}+\ldots+x^n\frac{\varphi^{(n)}(0)}{n!}=0$$

при любом n. Отсюда следует, что

$$R_n(x)=\varphi(x)-S_n(x)=\varphi(x),$$

так что $R_n(x)$ вовсе не стремится к нулю с ростом n. Таким образом, в нашем примере ряды вида (6.24) сходятся и суммы их тождественно равны нулю, отличаясь тем самым от функций $\varphi(x)$.

Из приведенного только что примера видно, что не всякая функция может быть разложена в ряд Тейлора. Однако если разложение функции в какой-либо степенной ряд вообще возможно, то оно является разложением в ряд Тейлора.

Теорема. *Пусть*

$$f(x)=c_0+c_1(x-a)+\ldots+c_n(x-a)^n+\ldots, \quad (6.29)$$

где стоящий справа ряд сходится в некотором сегменте $[a-R,\ a+R]$ *к функции* $f(x)$. *Тогда этот ряд является рядом Тейлора, т. е.*

$$c_n=\frac{f^{(n)}(a)}{n!}. \quad (6.30)$$

Доказательство. Применяя к равенству (6.29) n раз теорему о почленном дифференцировании степенного

ряда (§ 6), мы имеем

$$f^{(n)}(x)=n!c_n+\frac{(n+1)!}{1!}c_{n+1}(x-a)+\frac{(n+2)!}{2!}c_{n+2}(x-a)^2+\ldots$$

Если в этом тождестве положить $x=a$, то все слагаемые справа, кроме первого, обратятся в нуль и мы получим

$$f^{(n)}(x)=n!c_n,$$

откуда и следует (6.30).

Из доказанной теоремы вытекает, что функция, рассмотренная в последнем примере, не может быть представлена в окрестности точки $x=0$ не только суммой своего ряда Тейлора, но и суммой какого-либо другого степенного ряда.

Как другое следствие доказанного мы получаем, что если имеются два разложения одной и той же функции $f(x)$ в одной и той же области в ряд

$$f(x)=a_0+a_1(x-a)+\ldots+a_n(x-a)^n+\ldots$$

и в ряд

$$f(x)=b_0+b_1(x-a)+\ldots+b_n(x-a)^n+\ldots,$$

то оба эти ряда являются одним и тем же рядом Тейлора и поэтому совпадают, т. е.

$$a_0=b_0,\ a_1=b_1,\ \ldots,\ a_n=b_n,\ \ldots$$

Удобный для практических приложений признак разложимости функции $f(x)$ в ряд Тейлора описывается следующей теоремой.

Теорема. *Если функция $f(x)$ имеет производные сколь угодно высоких порядков и существует такая постоянная C, что при любых x и n*

$$|f^{(n)}(x)|<C,$$

то функция $f(x)$ разлагается в ряд Тейлора:

$$f(x)=f(a)+(x-a)\frac{f'(a)}{1!}+\ldots+(x-a)^n\frac{f^{(n)}(a)}{n!}+\ldots$$

при любом a.

Доказательство. По условию для остаточного члена $R_n(x)$ для функции $f(x)$ в формуле Тейлора мы имеем

$$|R_n(x)| = \left|(x-a)^n \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}\right| \leqq C\frac{|x-a|^n}{n!},$$

так что

$$\lim_{n\to\infty} |R_n(x)| \leqq C \lim_{n\to\infty} \frac{|x-a|^n}{n!} = 0,$$

и требуемое установлено.

ГЛАВА 7

СТЕПЕННЫЕ РЯДЫ. ПРИМЕРЫ И ПРИЛОЖЕНИЯ

§ 1. Разложение функции e^x в ряд Маклорена

Поскольку

$$\frac{d}{dx}e^x = e^x, \ \frac{d^2}{dx^2}e^x = e^x, \ldots,$$

так что при $f(x) = e^x$

$$f(0) = f'(0) = \ldots = f^{(n)}(0) = \ldots = 1,$$

формула Тейлора для функции e^x с $a = 0$ будет иметь вид

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}e^{\xi_n}}{(n+1)!},$$

где $0 \leqq \xi_n \leqq x$. Для остаточного члена мы имеем при любом x

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x^{n+1}e^{\xi_n}}{(n+1)!} \leqq \lim_{n\to\infty} \frac{x^{n+1}e^x}{(n+1)!} = e^x \lim_{n\to\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} = 0.$$

Следовательно, ряд

$$1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots \qquad (7.1)$$

сходится при любом x (впрочем, эта сходимость нам уже известна; она была установлена в § 2 главы 5), и суммой его является функция e^x.

Заменяя в (7.1) x на $-x$, мы получаем

$$e^{-x} = 1 - \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^n}{n!} + \ldots \qquad (7.2)$$

Областью сходимости этого ряда также является вся прямая.

§ 2. Разложения в ряды Маклорена гиперболических функций $\operatorname{ch} x$ и $\operatorname{sh} x$

Составим ряд, членами которого являются полусуммы соответствующих членов рядов (7.1) и (7.2):

$$\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots$$

Этот ряд также сходится при любом x (см. теорему о сложении рядов § 8 главы 2). Аналогично, вычисляя полуразности (см. теорему о вычитании рядов в § 8 главы 2) соответствующих членов рядов (7.1) и (7.2), мы получаем также всюду сходящийся ряд

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots$$

§ 3. Разложения в ряды Маклорена тригонометрических функций $\cos x$ и $\sin x$

Для функции $\cos x$ мы имеем

$$\frac{d}{dx}\cos x = -\sin x, \quad \frac{d^2}{dx^2}\cos x = -\cos x, \quad \frac{d^3}{dx^3}\cos x = \sin x,$$
$$\frac{d^4}{dx^4}\cos x = \cos x, \ldots$$

Следовательно, формулой Маклорена для $\cos x$ будет

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots \pm \begin{cases} x^{2n}\dfrac{\cos \xi_n}{(2n)!} & (0 \leqq \xi_n \leqq x), \\ x^{2n+1}\dfrac{\sin \eta_n}{(2n+1)!} & (0 \leqq \eta_n \leqq x). \end{cases}$$

Здесь при любом x

$$\left| \lim_{n \to \infty} x^{2n} \frac{\cos \xi_n}{(2n)!} \right| \leqq \lim_{n \to \infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 0,$$

и точно так же

$$\left| \lim_{n \to \infty} x^{2n+1} \frac{\sin \eta_n}{(2n+1)!} \right| = 0.$$

Поэтому остаточный член стремится к нулю. Следовательно, мы можем написать разложение в ряд Маклорена $\cos x$:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots$$

Аналогично получается разложение в ряд Маклорена функции $\sin x$:

$$\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots$$

§ 4. Показательная функция с комплексным значением показателя

Займемся определением показательной функции a^z, где a — вещественное и неотрицательное число, а показатель z может принимать не только вещественные, но и комплексные значения. Для этого можно взять некоторое характеристическое свойство функций a^x для вещественных значений x (т. е. такое свойство, которым обладают только эти функции), которое поддается переносу на случай комплексных значений независимого переменного, и, пользуясь именно этим свойством, распространить определение функции на комплексные значения аргумента.

Нам будет удобно, положив $\ln a = \alpha$, рассматривать функции

$$a^x = e^{(\ln a)x} = e^{\alpha x}.$$

Лемма. *Если непрерывная функция $f(x)$ отлична от тождественного нуля и такова, что для любых x и y*

$$f(x+y) = f(x) f(y), \tag{7.3}$$

то

$$f(x) = e^{\alpha x}$$

при некотором α.

Доказательство. Прежде всего, возьмем такое x, что $f(x) \neq 0$. По условию леммы такое x непременно найдется. Для этого x должно быть

$$f(x) = f(x+0) = f(x) f(0),$$

откуда

$$f(0)=1. \qquad (7.4)$$

Кроме того, мы имеем

$$f(1)=f\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)=f\left(\frac{1}{2}\right)f\left(\frac{1}{2}\right)\geqq 0. \qquad (7.5)$$

Если $f(1)=0$, то, очевидно, при любом целом n

$$f\left(\frac{1}{n}\right)=\sqrt[n]{f(1)}=0$$

и в силу обусловленной непрерывности функции $f(x)$

$$f(0)=\lim_{n\to\infty} f\left(\frac{1}{n}\right)=0,$$

что противоречит (7.4). Значит, в (7.5) имеет место строгое неравенство.

Следовательно, найдется такое α, что

$$f(1)=e^{\alpha}.$$

Далее, для любого значения x вида $\frac{1}{n}$ (где n — целое положительное число) мы имеем

$$\left(f\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n=f(1)=e^{\alpha},$$

откуда

$$f(x)=f\left(\frac{1}{n}\right)=e^{\alpha\frac{1}{n}}=e^{\alpha x}.$$

Пусть теперь $x=\frac{1}{n}$, где n — целое отрицательное число. Тогда $-n$ будет целым положительным числом и мы на основании условия леммы имеем

$$f\left(\frac{1}{n}\right)f\left(-\frac{1}{n}\right)=f(0)=1. \qquad (7.6)$$

Но по предыдущему

$$f\left(-\frac{1}{n}\right)=e^{-\frac{\alpha}{n}},$$

так что (7.6) дает нам

$$f(x)=f\left(\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{f\left(-\frac{1}{n}\right)}=\frac{1}{e^{-\frac{\alpha}{n}}}=e^{\alpha x}.$$

Для рационального значения $x=\frac{m}{n}$ должно быть поэтому

$$f(x)=f\left(\frac{m}{n}\right)=f\left(\frac{1}{n}+\ldots+\frac{1}{n}\right)=\left(f\left(\frac{1}{n}\right)\right)^m=\left(e^{\alpha\frac{1}{n}}\right)^m=$$

$$=e^{\alpha\frac{m}{n}}=e^{\alpha x}.$$

Пусть, наконец, x принимает произвольное вещественное значение $x=x_0$. Как известно, можно составить последовательность рациональных чисел (например, десятичных дробей) $x_1, x_2, \ldots$, сходящуюся к x_0:

$$\lim_{n\to\infty} x_n=x_0.$$

Тогда на основании обусловленной непрерывности функции f и известной непрерывности функции $e^{\alpha x}$ будет

$$f(x)=f(x_0)=f(\lim_{n\to\infty} x_n)=\lim_{n\to\infty} f(x_n)=\lim_{n\to\infty} e^{\alpha x_n}=$$

$$=e^{\alpha\lim\limits_{n\to\infty} x_n}=e^{\alpha x_0}=e^{\alpha x}.$$

Объединяя все сказанное, мы видим, что

$$f(x)=e^{\alpha x}$$

для всех значений x, а это и требовалось.

Следствие. *Если функция $f(x)$ удовлетворяет условиям леммы (т. е. при любых x и y выполняется равенство (7.3)) и*

$$f(1)=e^{\alpha_0}, \tag{7.7}$$

то

$$f(x)=e^{\alpha_0 x}.$$

Доказательство. Согласно лемме должно быть

$$f(x)=e^{\alpha x}$$

и, в частности,

$$f(1)=e^{\alpha}.$$

Вместе с (7.7) это дает нам $\alpha=\alpha_0$, откуда и следует требуемое.

Теорема. *Пусть значение функции $f(z)$ для любого вещественного или комплексного z определено как сумма ряда*

$$1+\frac{z}{1!}+\frac{z^2}{2!}+\ldots+\frac{z^n}{n!}+\ldots \tag{7.8}$$

Тогда функция $f(z)$ непрерывна, отлична от тождественного нуля и для любых комплексных z_1 и z_2

$$f(z_1+z_2)=f(z_1)f(z_2).$$

Доказательство. Ряд (7.8) сходится при любом вещественном значении z. Следовательно, по теореме о непрерывности суммы ряда (§ 5 главы 6) $f(z)$ является непрерывной при любом вещественном значении z функцией. Кроме того, $f(z)$ отлична от тождественного нуля (например, $f(0)=1$).

По правилу умножения рядов мы имеем

$$f(z_1)f(z_2)=\left(1+\frac{z_1}{1!}+\frac{z_1^2}{2!}+\frac{z_1^3}{3!}+\ldots\right)\left(1+\frac{z_2}{1!}+\frac{z_2^2}{2!}+\frac{z_2^3}{3!}+\ldots\right)=$$

$$\begin{aligned}
&= 1 + \frac{z_1}{1!} + \frac{z_1^2}{2!} + \frac{z_1^3}{3!} + \ldots \\
&+ \frac{z_2}{1!} + \frac{z_1 z_2}{1!1!} + \frac{z_1^2 z_2}{2!1!} + \frac{z_1^3 z_2}{3!1!} + \ldots \\
&+ \frac{z_2^2}{2!} + \frac{z_1 z_2^2}{1!2!} + \frac{z_1^2 z_2^2}{2!2!} + \frac{z_1^3 z_2^2}{3!2!} + \ldots \\
&+ \ldots
\end{aligned}$$

или, объединяя слагаемые «по диагональным линиям»,

мы получаем [1])

$$f(z_1)f(z_2) = 1 + \frac{z_1+z_2}{1!} + \frac{(z_1+z_2)^2}{2!} + \ldots + \frac{(z_1+z_2)^n}{n!} + \ldots = f(z_1+z_2).$$

Из этой теоремы следует, что сумма ряда (7.8), как функция z, обладает тем важным характеристическим свойством функции e^z, которое выделяет ее из всех непрерывных функций. Поэтому естественно определить значение суммы ряда (7.8) при произвольном z, вещественном или комплексном, как значение функции e^z:

$$e^z = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \ldots + \frac{z^n}{n!} + \ldots \tag{7.9}$$

§ 5. Формулы Эйлера

Положим в формуле (7.9) $z = iy$:

$$\begin{aligned} e^{iy} &= 1 + \frac{iy}{1!} + \frac{(iy)^2}{2!} + \frac{(iy)^3}{3!} + \frac{(iy)^4}{4!} + \frac{(iy)^5}{5!} + \ldots = \\ &= 1 + i\frac{y}{1!} - \frac{y^2}{2!} - i\frac{y^3}{3!} + \frac{y^4}{4!} + i\frac{y^5}{5!} + \ldots = \\ &= \left(1 - \frac{y^2}{2!} + \frac{y^4}{4!} - \ldots\right) + i\left(\frac{y}{1!} - \frac{y^3}{3!} + \frac{y^5}{5!} - \ldots\right) = \\ &= \cos y + i \sin y \end{aligned} \tag{7.10}$$

и аналогично

$$e^{-iy} = \cos y - i \sin y. \tag{7.11}$$

Отсюда мы получаем

$$\frac{e^{iy} + e^{-iy}}{2} = \cos y \tag{7.12}$$

---

[1]) В самом деле

$$\frac{z_2^n}{n!} + \frac{z_1 z_2^{n-1}}{1!\,(n-1!)} + \frac{z_1^2 z_2^{n-2}}{2!\,(n-2)!} + \ldots + \frac{z_1^n}{n!} = \frac{1}{n!}\left(z_2^n + C_n^1 z_1 z_2^{n-1} + C_n^2 z_1^2 z_2^{n-2} + \ldots + z_1^n\right) = \frac{1}{n!}(z_1+z_2)^n.$$

и

$$\frac{e^{iy}-e^{-iy}}{2i}=\sin y. \qquad (7.13)$$

Для $z=x+iy$, где x и y — вещественные числа, формулы (7.10) и (7.11) дают нам

$$e^{x+iy}=e^x e^{iy}=e^x(\cos y+i\sin y). \qquad (7.14)$$

Соотношения (7.12) и (7.13) называются *формулами Эйлера*. Вместе с формулой (7.14) формулы Эйлера устанавливают связь между тригонометрическими функциями и показательной функцией с комплексным показателем.

§ 6. Тригонометрические функции от комплексного значения аргумента

Степенные ряды для тригонометрических функций

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\ldots,$$

$$\sin x=\frac{x}{1!}-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\ldots$$

сходятся при любом вещественном значении x. Следовательно, по теореме Абеля должны сходиться, и притом абсолютно, ряды

$$1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}-\ldots$$

$$\frac{z}{1!}-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\ldots$$

при любом комплексном значении z.

Примем поэтому значения сумм этих рядов в качестве значений тригонометрических функций:

$$\cos z=1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}-\ldots+(-1)^n\frac{z^{2n}}{(2n)!}+\ldots, \qquad (7.15)$$

$$\sin z=\frac{z}{1!}-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\ldots+(-1)^n\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}+\ldots \qquad (7.16)$$

§ 7. Гиперболические функции от комплексного значения аргумента

Подобно тому как это было сделано в предыдущем параграфе для тригонометрических функций, мы можем определить значения гиперболических функций при комплексном значении аргумента:

$$\operatorname{ch} z = 1 + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \ldots + \frac{z^{2n}}{(2n)!} + \ldots, \qquad (7.17)$$

$$\operatorname{sh} z = \frac{z}{1!} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \ldots + \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots \qquad (7.18)$$

Полагая в (7.17) и (7.18) iz вместо z, мы получим

$$\operatorname{ch}(iz) = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \ldots + (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} + \ldots = \cos z$$

и аналогично

$$\operatorname{sh}(iz) = i\left(\frac{z}{1!} - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \ldots + (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots\right) = i \sin z.$$

Таким образом, установлена непосредственная связь между тригонометрическими и гиперболическими функциями.

§ 8. Вычисление значений функций при помощи ряда Маклорена

Разложения функций в ряды Маклорена позволяют во многих случаях вычислять с большой точностью значения этих функций. Вычислим, например, с точностью до пяти знаков $\sqrt[10]{e} = e^{\frac{1}{10}}$.

Мы имеем

$$e^{\frac{1}{10}} = 1 + \frac{0{,}1}{1!} + \frac{0{,}01}{2!} + \frac{0{,}001}{3!} + \ldots$$

Значит, $e^{0,1}$ близко к единице. Остаточный член R_3 имеет

вид

$$\frac{0,0001}{4!}e^{\xi},$$

где $0<\xi<0,1$, так что и e^{ξ} близко к единице. Поэтому ненаписанные члены в разложении $e^{0,1}$ не повлияют на первые пять знаков после запятой и их можно отбросить. Вычисление дает нам $e^{0,1}=1,10517$.

Иногда при вычислении значений функций удобно пользоваться почленным дифференцированием или интегрированием рядов.

Рассмотрим, например, разложение в ряд

$$\frac{1}{1+x^2}=1-x^2+x^4-\ldots$$

Очевидно, стоящий справа ряд сходится равномерно при $|x|\leq c<1$ и поэтому (см. § 9 главы 5) его почленное интегрирование между 0 и $x<1$ законно. Выполнение этого интегрирования дает нам

$$\int_0^x \frac{dx}{1+x^2}=\operatorname{arctg} x=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\ldots \qquad (7.19)$$

В частности, при $x=0,1$ мы имеем

$$\operatorname{arctg} 0,1=0,1-\frac{0,1^3}{3}+\frac{0,1^5}{5}-\ldots$$

Этот ряд — знакочередующийся. Поэтому его остаток не превосходит последнего отброшенного члена. Удерживая в нем два первых члена, мы получим значение

$$\operatorname{arctg} 0,1=0,09967$$

с пятью верными знаками.

Разложением (7.19) арктангенса в ряд можно воспользоваться для вычисления значения π.

Для этого вспомним сначала, что

$$\operatorname{tg} 2\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}.$$

Поэтому

$$2 \operatorname{arctg} a = \operatorname{arctg} \frac{2a}{1-a^2}.$$

В частности, при $a = \frac{1}{5}$ мы имеем

$$2 \operatorname{arctg} \frac{1}{5} = \operatorname{arctg} \frac{\frac{2}{5}}{1-\frac{1}{25}} = \operatorname{arctg} \frac{5}{12}$$

и, далее,

$$4 \operatorname{arctg} \frac{1}{5} = 2 \operatorname{arctg} \frac{5}{12} = \operatorname{arctg} \frac{\frac{10}{12}}{1-\frac{25}{144}} = \operatorname{arctg} \frac{120}{119}.$$

Примем теперь во внимание, что

$$\operatorname{tg}(\alpha-\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta},$$

так что

$$\operatorname{arctg} a - \operatorname{arctg} b = \operatorname{arctg} \frac{a-b}{1+ab}.$$

При $a = \frac{120}{119}$ и $b = 1$ мы получаем

$$\operatorname{arctg} \frac{120}{119} - \operatorname{arctg} 1 = \operatorname{arctg} \frac{\frac{120}{119}-1}{1+\frac{120}{119}} = \operatorname{arctg} \frac{1}{239}.$$

Значит,

$$\operatorname{arctg} 1 = 4 \operatorname{arctg} \frac{1}{5} - \operatorname{arctg} \frac{1}{239}.$$

Но $\operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}$ и потому мы имеем

$$\frac{\pi}{4} = 4 \operatorname{arctg} \frac{1}{5} - \operatorname{arctg} \frac{1}{239}.$$

Вычисляя по формуле (7.19) значения стоящих справа арктангенсов, мы можем получить π с любой наперед заданной точностью.

Предположим, что нас интересует значение π с точностью до 10^{-7}. Это значит, что мы можем положить

$$\operatorname{arctg}\frac{1}{239}=\frac{1}{239}-\frac{1}{3\cdot 239^3}$$

(следующий член разложения есть $\frac{1}{5}239^{-5}<10^{-10}$) и

$$\operatorname{arctg}\frac{1}{5}=\frac{1}{5}-\frac{1}{3\cdot 5^3}+\frac{1}{5\cdot 5^5}-\frac{1}{7\cdot 5^7}+\frac{1}{9\cdot 5^9}$$

(следующий член разложения есть $\frac{1}{11}5^{-11}<10^{-8}$). Окончательно мы получаем

$$\frac{\pi}{4}=4\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{3\cdot 5^3}+\frac{1}{5\cdot 5^5}-\frac{1}{7\cdot 5^7}+\frac{1}{9\cdot 5^9}\right)-\\-\left(\frac{1}{239}-\frac{1}{3\cdot 239^3}\right)=4\cdot 0{,}19739556-0{,}00418408=\\=0{,}78539816,$$

откуда $\pi=3{,}14159264$.

Зная значение π, можно в свою очередь весьма точно вычислять значения тригонометрических функций от аргументов, заданных в градусной мере.

Например, при вычислении $\sin 5^\circ=\sin\frac{\pi}{36}$ мы имеем

$$\sin 5^\circ=\frac{\pi}{36}-\frac{1}{6}\left(\frac{\pi}{36}\right)^3+\ldots$$

Ограничиваясь написанными первыми двумя слагаемыми, мы допустим ошибку, которая не будет превосходить первого из отброшенных членов (ибо мы имеем дело со знакочередующимся рядом), т. е.

$$\frac{1}{120}\left(\frac{\pi}{36}\right)^5<10^{-7}.$$

Вычисление дает нам

$$\sin 5^\circ=0{,}0872664-\frac{1}{6}0{,}0006646=0{,}087156.$$

§ 9. Биномиальный ряд

Найдем разложение в степенной ряд функции

$$f(x) = (1+x)^t \tag{7.20}$$

(t — произвольное вещественное число).

Дифференцируя равенство (7.20) n раз, мы получаем

$$f^{(n)}(x) = t(t-1)\ \ldots\ (t-n+1)(1+x)^{t-n},$$

так что

$$f^{(n)}(0) = t(t-1)\ \ldots\ (t-n+1).$$

Следовательно, рядом Маклорена функции $f(x)$ будет ряд

$$1 + \frac{t}{1!}x + \frac{t(t-1)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{t(t-1)\ \ldots\ (t-n+1)}{n!}x^n + \ \ldots \tag{7.21}$$

Если число t — целое и положительное, то в t-м и во всех последующих коэффициентах появляется равный нулю сомножитель. Поэтому эти коэффициенты, а следовательно, и сами члены, обращаются в нуль и ряд превращается в конечную сумму. Если же число t нецелое, или целое, но отрицательное, то ни один из коэффициентов ряда в нуль не обратится и нам придется иметь дело с бесконечным рядом. Этот ряд называется *биномиальным*, а его коэффициенты — *биномиальными коэффициентами*. По внешнему виду они напоминают обычные биномиальные коэффициенты, рассматриваемые в элементарной математике.

Определим радиус сходимости биномиального ряда. Для этого составим ряд из модулей членов биномиального ряда и воспользуемся признаком сходимости Даламбера. Мы имеем

$$u_n = \left| \frac{t(t-1)\ \ldots\ (t-n+1)}{n!}x^n \right|,$$

$$u_{n+1} = \left| \frac{t(t-1)\ \ldots\ (t-n)}{(n+1)!}x^{n+1} \right|,$$

так что

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{|t-n|}{n+1}|x|,$$

и потому

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{|t-n|}{n+1}|x|=|x|.$$

Следовательно, при $|x|<1$ биномиальный ряд абсолютно сходится, и можно говорить о его сумме $s(x)$.

Нам остается проверить, что ряд (7.21) действительно сходится к функции $f(x)$.

Внутри своего интервала сходимости биномиальный ряд (как и всякий степенной ряд) сходится равномерно. Поэтому применима теорема о почленном дифференцировании ряда (см. § 10 главы 5), которая дает нам

$$s'(x)=t+\frac{t(t-1)}{1!}x+\ldots+\frac{t(t-1)\ldots(t-n+1)}{(n-1)!}x^{n-1}+\ldots \tag{7.22}$$

Умножим обе части написанного равенства на $1+x$ и приведем подобные члены. (Эта операция законна, так как при $|x|<1$ ряд, стоящий в (7.22) справа, сходится абсолютно.) В результате мы снова получим сходящийся ряд, в котором коэффициентом при x^n $(n=0, 1, \ldots)$ будет сумма двух соседних коэффициентов умноженного ряда:

$$\frac{t(t-1)\ldots(t-n+1)}{(n-1)!}+\frac{t(t-1)\ldots(t-n+1)(t-n)}{n!}.$$

Эту сумму можно переписать как

$$\frac{t(t-1)\ldots(t-n+1)}{(n-1)!}\left(1+\frac{t-n}{n}\right)=\frac{t(t-1)\ldots(t-n+1)}{n!}t.$$

Мы получили умноженный на t коэффициент при x^n в биномиальном ряде (7.21). Таким образом, в области сходимости биномиального ряда

$$(1+x)s'(x)=ts(x). \tag{7.23}$$

Рассмотрим теперь отношение

$$\frac{s(x)}{f(x)}=\frac{s(x)}{(1+x)^t}$$

и найдем производную этого отношения

$$\frac{d}{dx}\frac{s(x)}{(1+x)^t}=\frac{s'(x)(1+x)^t-s(x)t(1+x)^{t-1}}{(1+x)^{2t}}=\frac{(1+x)s'(x)-ts(x)}{(1+x)^{t+1}}.$$

Ввиду (7.23) числитель последней дроби равен нулю, так что

$$\frac{d}{dx}\frac{s(x)}{(1+x)^t}=0.$$

Следовательно, отношение $\frac{s(x)}{f(x)}$ является постоянной:

$$\frac{s(x)}{f(x)}=C. \qquad (7.24)$$

Для определения этой постоянной положим в (7.20) и в (7.21) $x=0$. При этом мы, очевидно, получим

$$f(0)=1 \quad \text{и} \quad s(0)=1,$$

так что

$$C=\frac{s(0)}{f(0)}=1. \qquad (7.25)$$

Таким образом, из (7.24) и (7.25) следует, что

$$s(x)=f(x)=(1+x)^t,$$

т. е. ряд Маклорена функции $(1+x)^t$ при $|x|<1$ сходится к этой функции. Поэтому мы можем написать

$$(1+x)^t=1+\frac{t}{1!}x+\frac{t(t-1)}{2!}x^2+\ldots+$$
$$+\frac{t(t-1)\ldots(t-n+1)}{n!}x^n+\ldots$$

Придавая t те или иные значения, можно получать различные полезные формулы.

Примеры.

1. При $t=1/3$ мы имеем

$$\sqrt[3]{1+x}=1+\frac{1}{3}x-\frac{2}{2!\cdot 3^2}x^2+\frac{2\cdot 5}{3!\cdot 3^3}x^3-\frac{2\cdot 5\cdot 8}{4!\cdot 3^4}x^4+\ldots$$

2. При $t=-1/2$ получаем

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}}=1-\frac{1}{2}x+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^2-\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}x^3+\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}x^4-\ldots$$

и т. п.

§ 10. Приложения биномиального ряда

При помощи биномиального ряда можно быстро и довольно точно вычислять значения корней из чисел, а также значений различных функций.

Пример. Вычислить $\sqrt[5]{35}$ с точностью до 0,0001.
Мы имеем

$$\sqrt[5]{35}=2\sqrt[5]{\frac{35}{32}}=2\left(1+\frac{3}{32}\right)^{1/5}\cong 2\left(1+\frac{1}{5}\cdot\frac{3}{32}-\frac{4}{2!\cdot 5^2}\,\frac{3^2}{32^2}\right)=$$
$$=2+\frac{3}{80}-\frac{9}{6400}=2{,}0361.$$

Следующий член будет

$$\frac{4\cdot 9}{3!\cdot 5^3}\,\frac{3^3}{32^3}\leqq\frac{1}{25000}=0{,}00004.$$

Биномиальный ряд является основой многих дальнейших разложений функций в ряды. Найдем, например, разложение в ряд Маклорена функции $\arcsin x$.

Рассмотрим биномиальный ряд при $t=-1/2$ и независимой переменной $-x^2$:

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=1+\frac{1}{2}x^2+\frac{1\cdot 3}{2!\cdot 2^2}x^4+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{3!\cdot 2^3}x^6+\ldots$$

Почленное интегрирование этого ряда от нуля до $x<1$ (такое интегрирование законно, так как мы остаемся в пределах области сходимости ряда) дает нам

$$\int_0^x\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\arcsin x=x+\frac{1}{2\cdot 3}x^3+$$
$$+\frac{1\cdot 3}{2!\cdot 2^2\cdot 5}x^5+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{3!\cdot 2^3\cdot 7}x^7+\ldots \quad (7.26)$$

Как следует из сказанного в § 9 главы 5, этот ряд сходится в интервале $|x|<1$. Впрочем, это можно установить и непосредственно, применяя признак сходимости Даламбера.

§ 11. Разложение в ряд Маклорена логарифмической функции

Воспроизведем разложение в ряд Маклорена логарифмической функции $\ln(1+x)$ (ср. § 10 главы 5). Полагая в основной формуле для биномиального ряда $t=-1$,

мы имеем

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \ldots + (-1)^n x^n + \ldots$$

Этот ряд сходится равномерно при $|x| \leq q < 1$, так что можно произвести интегрирование от 0 до $x < 1$:

$$\int_0^x \frac{dx}{1+x} = \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + \ldots \tag{7.27}$$

Согласно сказанному в § 5 главы 4, полученный ряд сходится также и при $x = 1$. Сходимость этого ряда довольно медленная. Так, на границе интервала сходимости, т. е. при $x = 1$, мы получаем

$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \ldots + (-1)^{n+1} \frac{1}{n} + \ldots,$$

так что погрешность при удержании десяти первых членов ряда будет оцениваться сверху числом 1/11. Поэтому вычисление логарифмов на основе одной только формулы (7.27) нельзя считать практичным.

Займемся приспособлением этой формулы для вычислительных целей. Заменим прежде всего в ней x на $-x$:

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \ldots - \frac{x^n}{n} - \ldots \tag{7.28}$$

Почленное вычитание ряда (7.28) из (7.27) дает нам

$$\ln \frac{1+x}{1-x} = 2\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \ldots\right). \tag{7.29}$$

Полагая теперь

$$\frac{1+x}{1-x} = \frac{n+1}{n},$$

мы принимаем тем самым

$$x = \frac{1}{2n+1},$$

и формула (7.29) переписывается как

$$\ln\frac{n+1}{n}=2\left(\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{3(2n+1)^3}+\frac{1}{5(2n+1)^5}+\dots\right).$$

Пример. При $n=1$

$$\ln 2=2\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3\cdot 3^3}+\frac{1}{5\cdot 3^5}+\dots\right).$$

Стоящий в скобках ряд сходнтся быстрее, чем геометрическая прогрессня со знамеиателем 1/9. Поэтому удержание каждого следующего члена увеличивает точность в определенни $\ln 2$, грубо говоря, на один десятичный зиак.

§ 12. Приближенное вычисление определенных интегралов при помощи степенных рядов

Вычислениями значений функций вычислительные приложения теории рядов далеко не исчерпываются. При помощи рядов можно вычислять определенные интегралы, а также находить решение дифференциальных уравнений.

Приведем несколько примеров.

Пример. Вычислеиие интегрального снииуса:

$$\operatorname{si} x=\int_0^x \frac{\sin x}{x}\,dx.$$

Мы имеем

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\dots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\dots,$$

откуда

$$\frac{\sin x}{x}=1-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}-\dots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n+1)!}+\dots$$

(этот ряд сходится, как н предыдущнй, при всех значеинях x). Следовательио,

$$\int_0^x\frac{\sin x}{x}\,dx=x-\frac{x^3}{3!\cdot 3}+\frac{x^5}{5!\cdot 5}-\dots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!\,(2n+1)}+\dots$$

Подставляя в ряд вместо x те или иные конкретные значения переменной, мы можем вычислять интересующие нас значения функции.

Вычисление интегралов при помощи рядов можно комбинировать с обычными приемами интегрального исчисления.

Примеры.

1. Вычислить

$$I(x)=\int_0^x \frac{\sin x}{\sqrt{x}}\,dx.$$

Подстановка $\sqrt{x}=y$ приводит этот интеграл к виду

$$I(x)=\int_0^{\sqrt{x}} \frac{\sin y^2}{y}\,dy^2=2\int_0^{\sqrt{x}} \sin y^2\,dy,$$

откуда

$$I(x)=2\int_0^{\sqrt{x}}\left(y^2-\frac{y^6}{3!}+\ldots+(-1)^n\frac{y^{4n+2}}{(2n+1)!}+\ldots\right)dy.$$

Стоящий под знаком интеграла ряд сходится при всех y; поэтому

$$I(x)=2\left(\frac{y^3}{3}-\frac{y^7}{3!\cdot 7}+\ldots+(-1)^n\frac{y^{4n+3}}{(2+1)!\,(4n+3)}+\ldots\right)\Bigg|_0^{\sqrt{x}}$$

и, наконец,

$$I(x)=2\sqrt{x}\left(\frac{x}{3}-\frac{x^3}{3!\cdot 7}+\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!\cdot(4n+3)}+\ldots\right).$$

2. Большое значение в теории вероятностей имеет интеграл

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx.$$

Для его вычисления заменим в формуле (7.2) x на $1/2x^2$. Мы получим

$$e^{-\frac{x^2}{2}}=1-\frac{x^2}{2}+\left(\frac{x^2}{2}\right)^2\frac{1}{2!}-\left(\frac{x^2}{2}\right)^3\frac{1}{3!}+\ldots$$

Этот ряд сходнтся равномерно в любом сегменте $[0, x]$. Поэтому ннтегрнрованне этого ряда законно н дает нам

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx =$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x \left(1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{2!\cdot 2^2}-\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{n!\cdot 2^n}+\ldots\right)dx =$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(x-\frac{x^3}{2\cdot 3}+\frac{x^5}{2!\cdot 2^2\cdot 5}-\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{n!\cdot 2^n(2n+1)}+\ldots\right).$$

§ 13. Приближенное интегрирование дифференциальных уравнений при помощи степенных рядов

При помощи разложений функций в степенные ряды можно приближенно интегрировать разнообразные дифференциальные уравнения. Не вдаваясь здесь в сложные теоретические соображения и не касаясь многочисленных практических приемов, мы ограничимся лишь одним примером.

Пр н м е р. Найтн решенне уравнення

$$y''=xy \tag{7.30}$$

прн начальных условнях

$$y_{x=0}=1, \quad y'_{x=0}=0.$$

Будем нскать решенне этого уравнення в вnде степенного относнтельно x ряда

$$y=a_0+a_1x+\ldots+a_nx^n+\ldots \tag{7.31}$$

Прн нашнх начальных условнях

$$a_0=1, \quad a_1=0.$$

Днфференцнруя этот ряд дважды, мы получаем

$$2a_2+6a_3x+\ldots+(n+1)(n+2)a_{n+2}x^n+\ldots, \tag{7.32}$$

а умножая этот же ряд на x, мы нмеем

$$a_0x+a_1x^2+\ldots+a_{n-1}x^n+\ldots \tag{7.33}$$

Приравнивание коэффициентов членов рядов (7.32) и (7.33) с одинаковыми степенями x дает нам

$$2a_2 = 0,$$
$$6a_3 = 1,$$
$$12a_4 = 0,$$
$$20a_5 = a_2,$$
$$30a_6 = a_3,$$
$$42a_7 = a_4,$$
$$\dots\dots\dots$$

Нетрудно увидеть, что здесь оказывается

$$a_2 = a_5 = \ldots = a_{3n+2} = \ldots = 0,$$
$$a_4 = a_7 = \ldots = a_{3n+1} = \ldots = 0,$$
$$a_3 = \frac{1}{2\cdot 3}, \quad a_6 = \frac{1}{5\cdot 6}a_3, \quad \ldots, \quad a_{3n+3} = \frac{1}{(3n+2)(3n+3)}a_{3n}, \ \ldots$$

Иными словами, в ряде (7.31)

$$a_0 = 1, \quad a_3 = \frac{1}{3!}, \quad a_6 = \frac{1\cdot 4}{6!}, \quad \ldots, \quad a_{3n} = \frac{1\cdot 4\cdot 7\ldots(3n-2)}{(3n)!},$$

а остальные коэффициенты этого ряда обращаются в нуль.

Таким образом, мы получаем ряд

$$1 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1\cdot 4}{6!}x^6 + \ldots + \frac{1\cdot 4\cdot 7\ldots(3n-2)}{(3n)!}x^{3n} + \ldots \qquad (7.34)$$

Этот ряд сходится при любом значении x. В самом деле, применение признака сходимости Даламбера дает нам

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{a_{3n+3}}{a_{3n}}x^3 = \frac{1}{(3n+2)(3n+3)}x^3,$$

и с ростом n это отношение стремится к нулю при любом x.

Обозначим через $s(x)$ сумму ряда (7.34). Согласно сказанному в § 6 главы 6 сумма ряда

$$x + \frac{1}{3!}x^4 + \ldots + \frac{1\cdot 4\cdot 7\ldots(3n-5)}{(3n-3)!}x^{3n-2} + \ldots, \qquad (7.35)$$

полученного двукратным почленным дифференцированием ряда (7.34), равна $s''(x)$. С другой стороны, каждый член ряда (7.35) равен соответствующему члену ряда (7.34), умноженному на x. Следовательно, сумма ряда (7.35) равна $xs(x)$.

Таким образом, мы видим, что сумма $s(x)$ ряда (7.34) удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{d^2}{dx^2}\, s(x) = xs(x),$$

т. е. дифференциальному уравнению (7.30). Кроме того, очевидно,

$$s(0)=1 \quad \text{и} \quad s'(0)=0. \tag{7.36}$$

Однако существует лишь одна функция, удовлетворяющая уравнению (7.30) и начальным условиям (7.36). Поэтому $y=s(x)$.

ГЛАВА 8

ОРТОГОНАЛЬНЫЕ И ОРТОНОРМАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ ФУНКЦИЙ

§ 1. Проекции и разложения векторов

Данный параграф является вспомогательным. В нем излагаются элементарные сведения по векторной алгебре. Читатель, знакомый с ними, может этот параграф при чтении пропустить.

Далее длина любого вектора $\boldsymbol{a}$ будет обозначаться через $|\boldsymbol{a}|$. Иногда длина вектора называется его *нормой*. Подчеркнем, что длина любого вектора является неотрицательным числом. Пусть вектор $\boldsymbol{a}$ расположен на оси U. Припишем в этом случае его длине знак $+$, если направление $\boldsymbol{a}$ совпадает с направлением U, и знак $-$, если эти направления противоположны. Длину вектора на оси, рассматриваемую вместе с приписанным ей знаком, будем называть *алгебраической длиной* вектора на оси.

Проекцией вектора $\boldsymbol{a}$ на ось (на направление) U называется вектор, расположенный на оси U, алгебраическая длина которого равна

$$|\boldsymbol{a}|\cos(\widehat{\boldsymbol{a}, U}). \tag{8.1}$$

Далее мы будем рассматривать координатные пространства и векторы, проведенные из начала координат в каждую точку пространства.

Рассмотрим сначала обычное трехмерное векторное пространство с ортами $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ и $\mathbf{k}$, соответствующими направлениям координатных осей X, Y и Z. Любая линейная комбинация этих ортов, т. е. любая сумма вида

$$x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}, \tag{8.2}$$

где x, y и z — вещественные числа, является вектором рассматриваемого пространства. Коэффициенты x, y и z называются *компонентами* вектора (8.2). Сложение векторов осуществляется сложением их соответствующих компонент, а умножение вектора на число — умножением каждой из компонент на это число.

Наоборот, какой бы мы вектор $\boldsymbol{a}$ в пространстве ни взяли, можно найти такие числа x, y и z, что $\boldsymbol{a}$ приобретает вид (8.2). Таким образом, можно говорить, что каждый вектор $\boldsymbol{a}$ трехмерного пространства может быть *разложен* «по векторам» $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ и $\mathbf{k}$.

Геометрический смысл компонент в разложении (8.2) данного вектора $\boldsymbol{a}$ достаточно прост, но вместе с тем чрезвычайно важен, и его обобщение послужит нам удобной иллюстрацией при наглядном истолковании разложения функций в ряды.

Эти компоненты x, y и z суть алгебраические длины проекций вектора $\boldsymbol{a}$ соответственно на координатные оси X, Y и Z.

Если U есть координатная ось X, то (8.1) приобретает вид

$$|\boldsymbol{a}|\cos(\widehat{\boldsymbol{a}, X}).$$

Перепишем это выражение в координатной форме.

Прежде всего, из теоремы Пифагора следует, что если вектор $\boldsymbol{a}$ имеет вид (8.2), то длина его равна

$$\sqrt{x^2+y^2+z^2}. \tag{8.3}$$

Кроме того, мы видели, что алгебраическая длина проекции вектора (8.2) на ось X есть x. Учитывая (8.3), это можно записать как

$$\sqrt{x^2+y^2+z^2}\cos(\widehat{\boldsymbol{a}, X})=x,$$

откуда

$$\cos(\widehat{\boldsymbol{a}, X})=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}. \tag{8.4}$$

Но, очевидно,

$$\cos(\widehat{\boldsymbol{a}, X})=\cos(\widehat{X, \boldsymbol{a}}),$$

и (8.4) переписывается как

$$\cos(\widehat{a, X}) = \cos(\widehat{X, a}) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}. \qquad (8.5)$$

Аналогично получается, что

$$\cos(\widehat{a, Y}) = \cos(\widehat{Y, a}) = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \qquad (8.6)$$

$$\cos(\widehat{a, Z}) = \cos(\widehat{Z, a}) = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}. \qquad (8.7)$$

Возьмем теперь вектор

$$\boldsymbol{b} = x'\mathbf{i} + y'\mathbf{j} + z'\mathbf{k}.$$

Алгебраическая длина проекции $\boldsymbol{b}$ на направление вектора $\boldsymbol{a}$ есть сумма алгебраических длин проекций трех векторов $x'\mathbf{i}$, $y'\mathbf{j}$ и $z'\mathbf{k}$ на это направление. Но согласно (8.1) эти алгебраические длины будут равны соответственно

$$x'\cos(\widehat{X, a}), \quad y'\cos(\widehat{Y, a}), \quad z'\cos(\widehat{Z, a})$$

(для тех компонент x', y', z', которые неотрицательны, эти выражения просто совпадают с (8.1); для отрицательных же компонент направления соответствующих векторов $x'\mathbf{i}$, $y'\mathbf{j}$ или $z'\mathbf{k}$ противоположны направлениям своих осей, и косинусы изменят знаки, компенсируя отрицательность компонент).

Таким образом, алгебраическая длина проекции $\boldsymbol{b}$ на $\boldsymbol{a}$ будет равна

$$x'\cos(\widehat{X, a}) + y'\cos(\widehat{Y, a}) + z'\cos(\widehat{Z, a}),$$

или, учитывая (8.5), (8.6) и (8.7),

$$\frac{x'x + y'y + z'z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}. \qquad (8.8)$$

Вместе с тем на основании формулы (8.1) эта проекция есть

$$|\boldsymbol{b}|\cos(\widehat{a, b}), \qquad (8.9)$$

а

$$|\boldsymbol{b}| = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}. \tag{8.10}$$

Из (8.8), (8.9) и (8.10) следует, что

$$\cos(\widehat{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}}) = \frac{x'x + y'y + z'z}{\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}\,\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}. \tag{8.11}$$

Стоящее здесь в числителе выражение

$$x'x + y'y + z'z = xx' + yy' + zz'$$

называется *скалярным произведением* векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ и обычно обозначается через $\boldsymbol{ab}$.

В частности, при $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}$

$$\boldsymbol{ab} = \boldsymbol{aa} = x^2 + y^2 + z^2 = |\boldsymbol{a}|^2.$$

Непосредственно из определения скалярного произведения видно, что эта операция обладает свойствами коммутативности:

$$\boldsymbol{ab} = \boldsymbol{ba}$$

и дистрибутивности относительно действий сложения вектора и умножения вектора на число:

$$\boldsymbol{a}(\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{ab} + \boldsymbol{ac},$$
$$\lambda(\boldsymbol{ab}) = (\lambda\boldsymbol{a})\,\boldsymbol{b}.$$

Однако закону ассоциативности скалярное умножение, вообще говоря, не подчиняется: $(\boldsymbol{ab})\,\boldsymbol{c}$ есть вектор с тем же направлением, что и вектор $\boldsymbol{c}$, а вектор $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{bc})$ — с тем же направлением, что и $\boldsymbol{a}$. Поэтому в скалярных произведениях более чем двух векторов порядок выполнения умножений обязательно следует отмечать скобками.

В терминах скалярных произведений и норм формулу (8.11) можно переписать, как

$$\cos(\widehat{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}}) = \frac{\boldsymbol{ab}}{|\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}|}.$$

В связи с этим алгебраическая длина проекции $\boldsymbol{b}$ на направление вектора $\boldsymbol{a}$ равна

$$|\boldsymbol{b}|\cos(\widehat{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}}) = \frac{\boldsymbol{ab}}{|\boldsymbol{a}|}.$$

Выраженная в длинах вектора $\boldsymbol{a}$, она приобретает вид

$$\frac{\boldsymbol{ab}}{|\boldsymbol{a}|^2}. \tag{8.12}$$

Важным частным случаем взаимного расположения векторов является тот, когда они взаимно перпендикулярны. Перпендикулярные векторы называются также *ортогональными*. Очевидно, нулевой вектор, т. е. вектор, все компоненты которого равны нулю, ортогонален любому вектору (в том числе он является единственным вектором, который ортогонален самому себе). Если нам дан некоторый набор векторов, в котором любые два вектора ортогональны друг другу, то этот набор называется *ортогональной системой* векторов. Говоря о векторах, составляющих ортогональную систему, мы будем считать, что среди этих векторов нет нулевого. Очевидно, всякая ортогональная система векторов в трехмерном пространстве состоит не более чем из трех векторов.

Если векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ ортогональны, то косинус угла между ними обращается в нуль и (8.11) дает нам

$$\boldsymbol{ab} = xx' + yy' + zz' = 0.$$

Пусть теперь $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$ — произвольная ортогональная система векторов, а вектор $\boldsymbol{x}$ является их линейной комбинацией:

$$\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{a}_1 + x_2\boldsymbol{a}_2 + x_3\boldsymbol{a}_3. \tag{8.13}$$

Коэффициенты x_1, x_2 и x_3 можно выразить через скалярные произведения. Умножим для этого каждую часть (8.13) скалярно на $\boldsymbol{a}_1$:

$$\boldsymbol{x}\boldsymbol{a}_1 = (x_1\boldsymbol{a}_1)\,\boldsymbol{a}_1 + (x_2\boldsymbol{a}_2)\,\boldsymbol{a}_1 + (x_3\boldsymbol{a}_3)\,\boldsymbol{a}_1 = \\ = x_1(\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{a}_1) + x_2(\boldsymbol{a}_2\boldsymbol{a}_1) + x_3(\boldsymbol{a}_3\boldsymbol{a}_1). \tag{8.14}$$

Но

$$\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{a}_1 = |\boldsymbol{a}_1|^2,$$

а ввиду взаимной ортогональности векторов $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$ и $\boldsymbol{a}_3$

$$\boldsymbol{a}_2\boldsymbol{a}_1 = \boldsymbol{a}_3\boldsymbol{a}_1 = 0.$$

Следовательно, (8.14) приобретает вид

$$\boldsymbol{x}\boldsymbol{a}_1 = x_1 |\boldsymbol{a}_1|^2,$$

откуда

$$x_1 = \frac{\boldsymbol{x}\boldsymbol{a}_1}{|\boldsymbol{a}_1|^2}. \tag{8.15}$$

Сравнение с формулой (8.12) показывает, что x_1 есть алгебраическая длина проекции $\boldsymbol{x}$ на направление $\boldsymbol{a}_1$, выраженная в длинах вектора $\boldsymbol{a}_1$.

Аналогично скалярное умножение (8.13) на $\boldsymbol{a}_2$ и на $\boldsymbol{a}_3$ дает соответственно

$$x_2 = \frac{\boldsymbol{x}\boldsymbol{a}_2}{|\boldsymbol{a}_2|^2} \text{ и } x_3 = \frac{\boldsymbol{x}\boldsymbol{a}_3}{|\boldsymbol{a}_3|^2}. \tag{8.16}$$

Таким образом, формулу (8.13) можно записать как

$$\boldsymbol{x} = \frac{\boldsymbol{x}\boldsymbol{a}_1}{|\boldsymbol{a}_1|^2}\boldsymbol{a}_1 + \frac{\boldsymbol{x}\boldsymbol{a}_2}{|\boldsymbol{a}_2|^2}\boldsymbol{a}_2 + \frac{\boldsymbol{x}\boldsymbol{a}_3}{|\boldsymbol{a}_3|^2}\boldsymbol{a}_3. \tag{8.17}$$

Правую часть этой формулы называют *разложением* вектора $\boldsymbol{x}$ по ортогональной системе $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$.

В действительности *любой* вектор $\boldsymbol{x}$ трехмерного пространства может быть представлен в виде (8.13) и тем самым в виде (8.17). Мы, однако, намеренно оставляем в стороне этот вопрос, ограничиваясь следующим утверждением: *если* вектор $\boldsymbol{x}$ имеет вид (8.13), *то* соответствующие коэффициенты вычисляются по формулам (8.15) и (8.16). Условие: «если $\boldsymbol{x}$ имеет вид...» — не является тривиальным. Проиллюстрируем его содержательность на следующем примере. Пусть нам даны *два* ортогональных вектора, $\boldsymbol{a}_1$ и $\boldsymbol{a}_2$, и вектор $\boldsymbol{x}$, представленный в виде

$$\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{a}_1 + x_2\boldsymbol{a}_2. \tag{8.18}$$

Тогда, действуя, как и выше, мы получаем

$$\boldsymbol{a} = \frac{\boldsymbol{x}\boldsymbol{a}_1}{|\boldsymbol{a}_1|^2}\boldsymbol{a}_1 + \frac{\boldsymbol{x}\boldsymbol{a}_2}{|\boldsymbol{a}_2|^2}\boldsymbol{a}_2. \tag{8.19}$$

Очевидно, не всякий вектор трехмерного пространства представим в виде (8.18) (например, если $\boldsymbol{a}_1 = \mathbf{i}$, а $\boldsymbol{a}_2 = \mathbf{j}$, то в виде их линейных комбинаций можно представлять

лишь векторы, лежащие в плоскости XY). Однако *если* это имеет место, *то* справедлива формула (8.19).

Обратимся к важному частному случаю. Будем называть вектор *нормированным*, если его длина (норма) равна 1. Система векторов называется *нормированной*, если каждый входящий в неё вектор нормирован. Очевидно, для превращения вектора в нормированный (или, как говорят, для его нормировки) достаточно разделить вектор на его длину, на его норму.

Ортогональная и нормированная система векторов обычно называется *ортонормальной* (или ортонормированной) системой.

Вернемся теперь к ортогональной системе векторов $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$ и предположим, что она является ортонормальной, т. е. что

$$|\boldsymbol{a}_1| = |\boldsymbol{a}_2| = |\boldsymbol{a}_3| = 1.$$

В этом случае формула (8.17) приобретает особенно простой вид:

$$\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{x}\boldsymbol{a}_1)\,\boldsymbol{a}_1 + (\boldsymbol{x}\boldsymbol{a}_2)\,\boldsymbol{a}_2 + (\boldsymbol{x}\boldsymbol{a}_3)\,\boldsymbol{a}_3, \tag{8.20}$$

т. е. коэффициенты разложения вектора по ортонормальной системе являются скалярными его произведениями на векторы системы.

Примером ортонормальной системы является тройка векторов $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$, и само задание вектора в виде (8.2) является его разложением по этой системе.

Все сказанное выше можно перенести и на случай конечномерного, n-мерного пространства, в котором векторы являются последовательностями из n вещественных чисел:

$$\boldsymbol{x} = (x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n). \tag{8.21}$$

Сложение n-мерных векторов и умножение их на вещественные числа, как и в трехмерном случае, производятся покомпонентно.

Компоненты $x_1, \ldots, x_n$ вектора (8.21) можно понимать как алгебраические длины его проекций на координатные оси $X_1, \ldots, X_n$. За длину вектора $\boldsymbol{x}$ естественно

принять выражение

$$\sqrt{x_1^2+\ldots+x_n^2}.$$

Рассматривая плоскость, проходящую через ось вектора $\boldsymbol{x}$ и координатную ось $X_i\ (i=1, \ldots, n)$, мы имеем

$$\cos(\widehat{\boldsymbol{x}, X_i})=\frac{x_i}{\sqrt{x_1^2+\ldots+x_n^2}}.$$

Если ввести другой вектор

$$\boldsymbol{y}=(y_1, \ldots, y_n),$$

то, подобно тому, как это было в трехмерном пространстве,

$$\cos(\widehat{\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}})=\frac{x_1y_1+\ldots+x_ny_n}{\sqrt{x_1^2+\ldots+x_n^2}\sqrt{y_1^2+\ldots+y_n^2}},$$

где стоящее в числителе выражение называется *скалярным произведением* векторов $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$. Как и в трехмерном случае, оно обозначается через $\boldsymbol{xy}$ и является операцией, коммутативной и дистрибутивной относительно сложения векторов и относительно умножения вектора на число.

Называя векторы в n-мерном пространстве ортогональными, если их скалярное произведение равно нулю, мы можем говорить об ортогональных системах векторов в n-мерном пространстве. Ясно, что в n-мерном пространстве ортогональная система векторов может состоять не более чем из n векторов.

Пусть $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_m\ (m\leq n)$ — произвольная ортогональная система векторов в n-мерном пространстве, а вектор $\boldsymbol{x}$ имеет вид

$$\boldsymbol{x}=x_1\boldsymbol{a}_1+x_2\boldsymbol{a}_2+\ldots+x_m\boldsymbol{a}_m.$$

Тогда, умножая это равенство скалярно на $\boldsymbol{a}_i$ $(i=1, \ldots, m)$, мы получаем, что

$$x_i=\frac{\boldsymbol{xa}_i}{|\boldsymbol{a}_i|^2},\quad i=1, \ldots, m,$$

т. е.

$$\boldsymbol{x}=\frac{\boldsymbol{xa}_1}{|\boldsymbol{a}_1|^2}\boldsymbol{a}_1+\ldots+\frac{\boldsymbol{xa}_m}{|\boldsymbol{a}_m|^2}\boldsymbol{a}_m. \qquad (8.22)$$

Правая часть этой формулы называется *разложением* вектора x по ортогональной системе $a_1, \ldots, a_m$.

Если векторы $a_1, \ldots, a_m$ нормированные, т. е. если

$$|a_1| = \ldots = |a_m| = 1,$$

то система $a_1, \ldots, a_m$ называется *ортонормальной* и формула (8.22) приобретает вид

$$x = (xa_1)\,a_1 + \ldots + (xa_m)\,a_m. \qquad (8.23)$$

Из наглядных соображений видно (строгого доказательства мы приводить не будем), что при $m < n$ не всякий вектор пространства может быть разложен по системе $a_1, \ldots, a_m$. Однако из сказанного следует, что если он все-таки разлагается, то это разложение имеет вполне определенный вид, описываемый в (8.22), а для случая ортонормальной системы — в (8.23).

В качестве примера ортонормальной системы в n-мерном пространстве векторов (8.21) можно указать систему векторов («координатных ортов»):

$$\begin{gathered}(1, 0, \ldots, 0),\\ (0, 1, \ldots, 0),\\ \ldots\ldots\ldots\\ (0, 0, \ldots, 1).\end{gathered}$$

По этой системе разлагается любой вектор (8.21) и коэффициентами разложения являются сами компоненты вектора.

§ 2. Векторы и функции

Всякий вектор, понимаемый как последовательность чисел, является своего рода функцией. При этом независимой переменной можно считать номер компоненты вектора, а зависимой переменной — величину компоненты. Так, например, вектор (3, 7, —12) может быть задан и в виде таблицы

Номер компоненты	1	2	3
Велнчина компоненты	3	7	—12

С другой стороны, и функции обладают многими основными свойствами векторов. Их можно, подобно векторам, складывать, причем значения функции-суммы равны суммам соответствующих значений функций-слагаемых. Их можно и умножать на число, причем на это число умножается каждое значение умножаемой функции.

Оказывается, что для функций удается обнаружить аналоги и дальнейших понятий векторной алгебры: нормы, скалярного произведения (тем самым можно в каком-то смысле говорить и о «косинусе угла между двумя функциями»), ортогональной и ортонормальной систем и разложений по таким системам.

В § 1 речь шла о конечномерных пространствах. В таких пространствах удается найти конечную (т. е. состоящую из конечного числа векторов) ортогональную систему, по которой можно разложить любой вектор пространства. Пространство функций вещественного аргумента конечномерным уже не является, и потому такой конечной ортогональной системы в нем найти не удастся. В связи с этим возникает вопрос о поисках бесконечных систем функций, которые могли бы стать основой разложения достаточно разнообразных функций, и о нахождении коэффициентов в этих разложениях.

Но разложение функций по бесконечной системе перестает быть обычной суммой, превращаясь в ряд или даже в интеграл. Такого рода разложения будут рассматриваться в оставшихся главах курса.

§ 3. Нормированные и ортогональные функции

Скалярным произведением векторов является сумма произведений их компонент.

Пусть $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ — две функции, заданные на сегменте $[a, b]$ и непрерывные на нем. Интеграл от их произведения

$$\int_a^b \varphi_1(x)\,\varphi_2(x)\,dx \qquad (8.24)$$

по своей внешней форме сильно напоминает скалярное

произведение (не следует забывать, что интегрирование является своеобразной разновидностью суммирования).

Поэтому все те понятия, которые определяются через скалярные произведения векторов, и все свойства векторов, которые выражаются через их скалярные произведения, можно попытаться распространить и на непрерывные функции, пользуясь вместо скалярных произведений интегралами вида (8.24).

Норма вектора (т. е. его длина) есть квадратный корень из скалярного произведения вектора самого на себя. Поэтому естественно ввести следующее определение.

Определение. *Нормой функции* $\varphi(x)$ на сегменте $[a, b]$ называется квадратный корень из интеграла

$$\int_a^b \varphi^2(x)\,dx.$$

Если этот интеграл равен единице:

$$\int_a^b \varphi^2(x)\,dx = 1,$$

то функция $\varphi(x)$ называется *нормированной* на $[a, b]$.

Ортогональность векторов означает равенство нулю их скалярного произведения.

По аналогии введем определение ортогональности функций.

Определение. Функции $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ называются *ортогональными* $[a, b]$, если

$$\int_a^b \varphi_1(x)\,\varphi_2(x)\,dx = 0.$$

§ 4. Ортогональные и нормированные системы функций

Рассмотрим теперь последовательность функций

$$\varphi_1(x),\ \varphi_2(x),\ \ldots, \tag{8.25}$$

заданных и непрерывных на сегменте $[a, b]$, среди которых нет функции, тождественно равной нулю.

Определение. Последовательность (8.25) называется *нормированной* на сегменте $[a, b]$, если нормирована каждая функция последовательности, т. е. если

$$\int_a^b \varphi_n^2(x)\,dx = 1 \quad \text{при любом } n.$$

Последовательность (8.25) называется *ортогональной* на сегменте $[a, b]$, если ортогональны на этом сегменте две различные входящие в нее функции, т. е. если

$$\int_a^b \varphi_n(x)\,\varphi_m(x)\,dx = 0 \quad \text{при } n \neq m.$$

Последовательность (8.25) называется *ортонормальной* (или ортонормированной) на некотором сегменте, если она является нормированной и ортогональной, т. е.

$$\int_a^b \varphi_n(x)\,\varphi_m(x)\,dx = \begin{cases} 1, & \text{если } n = m, \\ 0, & \text{если } n \neq m. \end{cases}$$

Пример. Система функций

$$1,\ \cos x,\ \sin x,\ \cos 2x,\ \sin 2x,\ \ldots \tag{8.26}$$

называется системой *тригонометрических функций*. Эта система ортогональна на сегменте $[-\pi, \pi]$. В самом деле (мы далее будем для единообразия полагать $1 = \cos 0x$), при $n = 0, 1, 2, \ldots$ $\ldots, m = 0, 1, \ldots$ и $n \neq m$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos mx\,dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} (\cos(n-m)x + \cos(n+m)x)\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n-m}\sin(n-m)x + \frac{1}{n+m}\sin(n+m)x\right)\Bigg|_{-\pi}^{\pi} = 0.$$

Далее, при $n = 1, 2, \ldots,\ m = 1, 2, \ldots$ и $n \neq m$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \sin mx\,dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} (\cos(n-m)x - \cos(n+m)x\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n-m}\sin(n-m)x - \frac{1}{n+m}\sin(n+m)x\right)\Bigg|_{-\pi}^{\pi} = 0$$

и, наконец, при любых $n=0, 1, 2, \ldots$ и $m=1, 2, \ldots$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \sin mx \, dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} (\sin (m+n) x + \sin (m-n) x) \, dx.$$

Здесь интеграл от каждого из слагаемых равен нулю, потому что при $k \neq 0$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin kx \, dx = -\frac{1}{k} \cos kx \Big|_{-\pi}^{\pi} = 0,$$

а при $k=0$

$$\sin kx = 0$$

тождественно на $[-\pi, \pi]$.

Таким образом, система (8.25) на сегменте $[-\pi, \pi]$ является ортогональной. Нормированной на сегменте $[-\pi, \pi]$ эта система не будет, так как

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx \, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx \, dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} (\cos^2 nx + \sin^2 nx) \, dx = $$

$$= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} dx = \pi,$$

и нормой каждой из функций $\sin nx$ и $\cos nx$ является $\sqrt{\pi}$, а норма единицы, очевидно, равна $\sqrt{2\pi}$.

§ 5. Нормировка систем функций

Следующий переход от произвольной системы, заданной на некотором сегменте функций $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots$, к нормированной на этом сегменте системе называется ее *нормировкой*. Он довольно прост и сходен с нормировкой векторов. Для того чтобы его осуществить, достаточно вычислить для каждой из функций последовательности (8.25) интеграл

$$\int_a^b \varphi_n^2(x) \, dx = \lambda_n$$

и разделить каждую функцию φ_n на $\sqrt{\lambda_n}$. Очевидно, при этом мы получим нормированные функции:

$$\int_a^b \left(\frac{\varphi_n(x)}{\sqrt{\lambda_n}}\right)^2 dx = \frac{1}{\lambda_n} \int_a^b \varphi_n^2(x) \, dx = \frac{\lambda_n}{\lambda_n} = 1.$$

Нормировка системы тригонометрических функций (8.26) на сегменте $[-\pi, \pi]$ состоит, таким образом, в делении единицы на $\sqrt{2\pi}$ и в делении каждой из остальных функций на $\sqrt{\pi}$. В результате получится ортонормальная на сегменте $[-\pi, \pi]$ система функций

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos x, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin x, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos 2x, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin 2x, \ \ldots$$

Получение из некоторой последовательности функций ортогональной системы называется ее *ортогонализацией*. Этот процесс более сложен, чем нормировка, и даже не всегда возможен. Мы здесь не будем останавливаться на этом вопросе.

§ 6. Разложение по системам функций

Пусть снова дана заданная на $[a, b]$ последовательность функций

$$\varphi_1(x), \ \varphi_2(x), \ldots, \ \varphi_n(x), \ \ldots, \qquad (8.27)$$

а $f(x)$ — некоторая функция, также заданная на $[a, b]$. Мы будем рассматривать вопросы, связанные с разложением функции $f(x)$ в ряд по системе функций (8.27), т. е. с представлением функции $f(x)$ в виде суммы сходящегося ряда

$$f(x) = a_1\varphi_1(x) + a_2\varphi_2(x) + \ldots + a_n\varphi_n(x) + \ldots$$

С такого рода представлениями функций мы уже встречались при разложении функций в ряды Тейлора и Маклорена. В случае рядов Тейлора в качестве последовательности (8.27) бралась последовательность

$$1, \ x-a, \ (x-a)^2, \ \ldots, \qquad (8.28)$$

а в случае рядов Маклорена — последовательность

$$1, \ x, \ x^2, \ \ldots \qquad (8.29)$$

Хотя разложение функции в ряды Тейлора и Маклорена весьма полезно для теории и практики, но оно страдает рядом недостатков. К их числу следует отнести то, уже отмечавшееся обстоятельство, что суммами

сходящихся степенных рядов могут быть лишь функции, дифференцируемые сколько угодно раз. Вместе с тем как в самой математике, так и в ее приложениях приходится исследовать функции, имеющие «неплавности», «изломы» и даже «скачки».

Кроме того, ни одна из последовательностей (8.28) и (8.29) не является ортогональной ни на каком из сегментов. Поэтому на разложения функций в ряды Тейлора и Маклорена не удается перенести приемы, применяемые при разложениях векторов по ортогональным системам.

Описанная в § 4 система тригонометрических функций и некоторые близкие ей системы лишены указанных недостатков степенных рядов. Разложения по этим системам будут рассматриваться в следующей главе.

ГЛАВА 9

РЯДЫ ФУРЬЕ

§ 1. Ряды и коэффициенты Фурье

В § 1 главы 8 мы выяснили, что если нам даны три вектора

$$\boldsymbol{a}_1,\ \boldsymbol{a}_2,\ \boldsymbol{a}_3,$$

составляющих ортонормальную систему, т. е. векторы, для которых

$$|\boldsymbol{a}_1| = |\boldsymbol{a}_2| = |\boldsymbol{a}_3| = 1,$$
$$\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{a}_2 = \boldsymbol{a}_2\boldsymbol{a}_3 = \boldsymbol{a}_3\boldsymbol{a}_1 = 0,$$

то любой вектор $\boldsymbol{x}$ можно представить в виде

$$\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{a}_1 + x_2\boldsymbol{a}_2 + x_3\boldsymbol{a}_3,$$

где коэффициентами x_1, x_2, x_3 являются соответственно скалярные произведения $\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{a}_2\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{a}_3\boldsymbol{x}$.

Пусть нам дана ортонормальная на сегменте $[a, b]$ последовательность функций

$$\varphi_1(x),\ \varphi_2(x),\ \ldots,\ \varphi_n(x),\ \ldots \tag{9.1}$$

и некоторая непрерывная функция $f(x)$. Займемся задачей о разложении функции $f(x)$ в ряд по функциям (9.1), т. е. о представлении функции $f(x)$ в виде

$$f(x) = a_1\varphi_1(x) + a_2\varphi_2(x) + \ldots + a_n\varphi_n(x) + \ldots$$

Следуя проводимой нами аналогии между векторами и функциями, найдем числа

$$a_n = \int_a^b f(x)\,\varphi_n(x)\,dx, \qquad n = 1,\ 2,\ \ldots, \tag{9.2}$$

и составим ряд

$$a_1\varphi_1(x)+a_2\varphi_2(x)+\ldots+a_n\varphi_n(x)+\ldots \qquad (9.3)$$

Определение. Ряд (9.3) называется *рядом Фурье* функции по системе функций (9.1). Коэффициенты этого ряда называются *коэффициентами Фурье* функции $f(x)$ по системе (9.1).

Сравнительно простой и удобной системой функций для разложений в ряд Фурье по ней на сегменте $[-\pi, \pi]$ является описанная в главе 8 нормированная система тригонометрических функций

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}},\ \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos x,\ \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin x,\ \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos 2x,\ \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin 2x,\ \ldots$$

Разложение функции $f(x)$ в ряд Фурье по этой системе на сегменте $[-\pi, \pi]$ имеет вид

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx), \qquad (9.4)$$

где коэффициенты Фурье определяются по формулам

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\,dx, \qquad (9.5)$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,dx, \qquad n=1,\ 2,\ \ldots \qquad (9.6)$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,dx, \qquad n=1,\ 2,\ \ldots \qquad (9.7)$$

Ряд (9.4) называется *тригонометрическим рядом Фурье,* чтобы отличать его от рядов Фурье, получающихся при разложениях по другим системам функций. Однако тригонометрические ряды Фурье употребляются в теории и практике по сравнению с остальными рядами Фурье столь часто, что обычно их называют «просто» рядами Фурье. Ряды же Фурье по другим системам

функций называются часто «обобщенными» рядами Фурье[1]).

Заметим, что при $n=0$

$$\cos nx = \cos 0 = 1.$$

Поэтому формулу (9.5) можно рассматривать как частный случай формулы (9.6), который получается при $n=0$. Поэтому мы будем в тех случаях, когда это представится удобным, формулы (9.5) и (9.6) объединять в общую формулу

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx, \qquad n = 0,\ 1,\ 2, \ldots \quad (9.8)$$

Отметим еще следующее терминологическое обстоятельство. Характеризация некоторого ряда как тригонометрического означает, что этот ряд имеет вполне определенный *внешний вид*: его членами являются тригонометрические функции вида $\cos nx$ и $\sin nx$, снабженные теми или иными коэффициентами. Характеризация же ряда как ряда Фурье указывает на вполне определенное *происхождение* его коэффициентов по формулам типа (9.2) (в тригонометрическом случае эти формулы заменяются на конкретные формулы (9.5) — (9.7)).

Если функция $f(x)$ непрерывна (или хотя бы кусочно непрерывна) на сегменте $[-\pi, \pi]$, то все интегралы вида (9.2) имеют смысл, и таким образом можно говорить о ряде Фурье этой функции и о его сходимости. По аналогии с векторами можно было бы ожидать, что сумма ряда Фурье функции $f(x)$ должна существовать и быть равной самой функции $f(x)$. Обычно так оно и есть, хотя, конечно, может оказаться, что ряд Фурье некоторой функции $f(x)$ не сходится вовсе или же сходится, но не к функции $f(x)$, а к какой-нибудь совсем другой функции. С подобным явлением мы уже встречались при разложениях функций в степенные ряды.

В связи со сказанным перед нами встает задача: выяснить, в каких случаях ряд Фурье функции $f(x)$

[1]) Следует подчеркнуть, что тригонометрические ряды Фурье рассматривались и до Фурье (1768 — 1830); сам Фурье ввел в научный обиход ряды более общего вида.

сходится к этой функции. Оказывается, что для довольно широкого класса функций это действительно так.

Не вдаваясь в исчерпывающее исследование вопроса, мы приведем систему достаточных условий для того, чтобы функция $f(x)$ была разложима в тригонометрический ряд Фурье в сегменте $[-\pi, \pi]$. Переход от этого сегмента к произвольному другому сегменту не является принципиальным, и мы увидим, что это можно проделать уже легко.

§ 2. Условия Дирихле и теорема о разложении функции в ряд Фурье

Определение. Функция $f(x)$ называется *кусочно монотонной* на сегменте $[a, b]$, если этот отрезок разбивается на конечное число сегментов

$$[a, x_1],\ [x_1, x_2],\ [x_2, x_3],\ \ldots,\ [x_n, b],$$

в каждом из которых функция $f(x)$ монотонна.

Если функция $f(x)$ кусочно монотонна на сегменте $[a, b]$, то в любой внутренней точке этого сегмента существуют правые и левые пределы ее значений, т. е. пределы

$$\lim_{x \to c-0} f(x) = f(c-0),$$

$$\lim_{x \to c+0} f(x) = f(c+0).$$

Теорема. *Если функция $f(x)$ задана на сегменте $[-\pi, \pi]$ и является на нем кусочно непрерывной, кусочно монотонной и ограниченной, то ее тригонометрический ряд Фурье сходится во всех точках сегмента $[-\pi, \pi]$.*

Если $s(x)$ — сумма тригонометрического ряда Фурье функции $f(x)$, то во всех точках непрерывности этой функции

$$s(x) = f(x),$$

а во всех точках разрыва

$$s(x) = \frac{1}{2}(f(x-0) + f(x+0)).$$

Кроме того,

$$s(\pi) = s(-\pi) = \frac{1}{2}(f(\pi-0) + f(-\pi+0)). \qquad (9.9)$$

Условия этой теоремы часто называются *условиями Дирихле,* а сама теорема — *теоремой Дирихле*. Доказательство теоремы Дирихле выходит за пределы данного курса.

Из теоремы Дирихле видно, что значения функции $f(x)$ в точках ее разрыва не влияют на ее ряд Фурье. Это значит, что функции, имеющие одни и те же точки разрыва и отличающиеся друг от друга лишь в этих точках, разлагаются в один и тот же ряд Фурье.

Далее, говорить о непрерывности функции $f(x)$ на концах сегмента $[-\pi, \pi]$, т. е., в точках $-\pi$ и π, вообще не имеет смысла, даже если выполняются предельные соотношения $f(-\pi+0)=f(-\pi)$ и $f(\pi-0)=f(\pi)$. В самом деле, для непрерывности функции $f(x)$ в точке π необходимо двойное равенство

$$f(\pi-0)=f(\pi)=f(\pi+0).$$

Но выражение $f(\pi+0)$ характеризует поведение функции $f(x)$ справа от точки π, т. е. там, где эта функция, быть может, и не определена. То же справедливо и для выражения $f(-\pi-0)$. Поэтому в теореме Дирихле концы сегмента $[-\pi, \pi]$ играют особую роль, сходную с ролью точек разрыва.

§ 3. Разложение периодических функций в ряд Фурье

Далее мы будем говорить, что *функция f имеет период T*, если для любого x

$$f(x)=f(x+T),$$

не предполагая при этом, что T является наименьшим из всех чисел, обладающих этим свойством.

Все тригонометрические функции вида

$$\sin nx,\ \cos nx \qquad (n=1,\ 2, \ldots)$$

определены для любого вещественного значения x и являются периодическими. Период каждой из них равен 2π. Следовательно, и любая их сумма вместе с постоянным членом

$$\frac{a_0}{2}+a_1\cos x+b_1\sin x+\ldots+a_n\cos nx+b_n\sin nx$$

также определена для любого вещественного x и имеет период 2π. Очевидно, это свойство периодичности сохраняется и при переходе к пределу, так что сумма любого сходящегося тригонометрического ряда

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$$

также имеет период 2π.

Таким образом, получается следующая картина. Первоначально мы имели некоторую функцию $f(x)$ (удовлетворяющую условиям Дирихле), заданную на сегменте $[-\pi, \pi]$. Составив ее тригонометрический ряд Фурье, мы получим в качестве его суммы $s(x)$ функцию, которая определена уже не только на сегменте $[-\pi, \pi]$, но и для всех остальных вещественных значений x. При этом на сегменте $[-\pi, \pi]$ сумма $s(x)$ описывает функцию $f(x)$.

Значениями функции $f(x)$, лежащими вне сегмента $[-\pi, \pi]$, мы пока просто не интересовались; в частности, мы тем самым допускали, что эта функция вне сегмента $[-\pi, \pi]$ могла быть и не определена. Предположим, однако, что функция $f(x)$ определена для всех x, а мы лишь ограничились ее рассмотрением на сегменте $[-\pi, \pi]$ и составили применительно к этим значениям сумму ее тригонометрического ряда Фурье $s(x)$. Эта сумма, будучи периодической функцией, будет описывать функцию $f(x)$ вне сегмента $[-\pi, \pi]$ в том и только в том случае, когда сама функция является периодической с периодом 2π в точках своей непрерывности, т. е. когда для любой точки непрерывности x функции $f(x)$

$$f(x+2\pi)=f(x).$$

Наоборот, если функция $f(x)$ этим свойством не обладает, то вне сегмента $[-\pi, \pi]$ она может не иметь с функцией $s(x)$ ничего общего.

Итак, если функция $f(x)$ периодическая с периодом 2π, то ее тригонометрический ряд Фурье описывает ее всюду. В противном случае он описывает ее лишь на сегменте $[-\pi, \pi]$. Разумеется, слово «описание» следует понимать в том смысле, как это сформулировано в теореме Дирихле.

§ 4. Физическое истолкование разложения функции в тригонометрический ряд Фурье

Будем в качестве независимого переменного рассматривать время. Тогда функциональная зависимость будет описывать некоторый происходящий во времени процесс.

Ограничимся для удобства рассуждений тем случаем, когда этот процесс сводится к механическим движениям некоторой системы, т. е. к ее пространственным перемещениям.

Встает вопрос о представлении движения на некотором отрезке времени в виде комбинации тех или иных заранее заданных движений. Этому представлению движения будет соответствовать разложение описывающей его функции в функциональный ряд по заданным функциям.

В частности, можно поставить вопрос о представлении достаточно произвольного движения на некотором отрезке времени $[-\pi, \pi]$ в виде одновременного осуществления некоторого стационарного смещения, а также гармонических колебаний с периодами $2\pi, \frac{2\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}, \ldots$ Так как любое колебание такого вида представляется выражением

$$A_n \sin(nt + \varphi_n), \tag{9.10}$$

ему соответствует пара членов тригонометрического ряда

$$a_n \cos nt + b_n \sin nt, \tag{9.11}$$

где

$$a_n = A_n \sin \varphi_n, \tag{9.12}$$

$$b_n = A_n \cos \varphi_n. \tag{9.13}$$

Таким образом, пара соседних членов (9.11) тригонометрического ряда соответствует некоторой гармонической составляющей (9.10) общего движения системы с периодом $\frac{2\pi}{n}$ и амплитудой A_n. Эта гармоническая составляющая обычно называется n-й *гармоникой* движения. Из формул (9.12) и (9.13) мы имеем для амплитуды n-й гармоники

$$A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}.$$

§ 5. Разложение функции $f(x)=x$

Рассмотрим в качестве примера разложение в тригонометрический ряд Фурье функции

$$f(x)=x, \tag{9.14}$$

заданной пока что на сегменте $[-\pi, \pi]$. Так как эта функция внутри сегмента $[-\pi, \pi]$ непрерывна и монотонна, она удовлетворяет очевидным образом условиям Дирихле. Заметим, что говорить о непрерывности нашей функции на концах рассматриваемого сегмента, т. е. в точках $-\pi$ и π, мы пока не имеем права, так как для непрерывности функции в этих точках мы должны знать ее предельное поведение при подходе к сегменту извне. Но о значениях функции $f(x)$ вне сегмента $[-\pi, \pi]$ мы пока ничего не знаем.

Составим тригонометрический ряд Фурье для нашей конкретной функции $f(x)=x$. В соответствии с формулами (9.5) — (9.7) для этого нам нужно вычислить следующие интегралы:

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\,dx=\frac{1}{\pi}\frac{x^2}{2}\Bigg|_{-\pi}^{\pi}=0,$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\cos nx\,dx=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left(x\frac{1}{n}\sin nx\Bigg|_{-\pi}^{\pi}-\frac{1}{n}\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\,dx\right)=0,$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\sin nx\,dx=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left(-x\frac{1}{n}\cos nx\Bigg|_{-\pi}^{\pi}+\frac{1}{n}\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\,dx\right)=(-1)^{n+1}\frac{2}{n}.$$

Таким образом, тригонометрическим рядом Фурье функции $f(x)=x$ на сегменте $[-\pi, \pi]$ будет ряд

$$2\left(\sin x-\frac{1}{2}\sin 2x+\frac{1}{3}\sin 3x-\ldots+\right.$$
$$\left.+(-1)^{n+1}\frac{1}{n}\sin nx+\ldots\right).$$

Сумма этого ряда является функцией от x. Обозначим ее через $s(x)$.

Эта функция во всех точках непрерывности $f(x)$ должна с ней совпадать. Значит, внутри сегмента $[-\pi, \pi]$ должно быть

$$s(x)=f(x)=x.$$

Далее, при $x=\pm\pi$ все синусы обращаются в нуль:

$$\sin n\pi=0.$$

Следовательно,

$$s(\pm\pi)=0.$$

Наконец, как было отмечено, функция $s(x)$ должна быть периодической и иметь период 2π. Поэтому аналитически эту функцию можно задать как[1])

$$s(x)=\begin{cases} x-\left[\frac{x}{2\pi}\right]2\pi, & x\neq\pm\pi,\ \pm3\pi,\ \pm5\pi,\ \ldots, \\ 0, & x=\pm\pi,\ \pm3\pi,\ \pm5\pi,\ \ldots, \end{cases}$$

а график ее указан на рис. 6.

Если мы продолжим функцию $f(x)=x$ с сегмента $[-\pi, \pi]$ на всю вещественную прямую, согласно ее

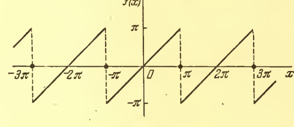


Рис. 6.

аналитическому виду (9.14), то мы вне сегмента $[-\pi, \pi]$ получим нечто совершенно отличное от функции $s(x)$.

---

1) Запись $\left[\frac{x}{2\pi}\right]$ («функция антье») означает наибольшее целое число отрезков длины 2π, укладывающихся в отрезке длины x.

Однако продолжение $f(x)=x$ с сегмента $[-\pi, \pi]$ периодической функцией с периодом 2π, если положить

$$f(\pm\pi)=f(\pm 3\pi)=f(\pm 5\pi)=\ldots=0,$$

будет совпадать с функцией $s(x)$.

§ 6. Сдвиг сегмента разложения

То, что мы в качестве основного сегмента задания разлагаемых в тригонометрические ряды Фурье функций брали $[-\pi, \pi]$, является удобным, но совершенно не принципиальным. Если в тех или иных теоретических или прикладных задачах приходится иметь дело с разложением функции в тригонометрический ряд Фурье не в сегменте $[-\pi, \pi]$, а в каком-нибудь другом сегменте $[a, b]$, то это никаких дополнительных трудностей не создает, а только несколько усложняет обозначения.

В сущности, этот вопрос сводится к тому, как из ортонормальной системы функции на $[-\pi, \pi]$ получить ортонормальную систему функций на $[a, b]$. Очевидно, переход от $[-\pi, \pi]$ к $[a, b]$ можно осуществить сдвигом первоначального сегмента вдоль оси x и изменением масштабов по этой оси. Следующая лемма и основанные на ней рассуждения показывают, что сдвиги не изменяют ни ортонормальности систем периодических функций, ни соответствующих коэффициентов Фурье периодических функций (разумеется, если их период равен длине интервала разложения).

Лемма. *Если функция $\psi(x)$ периодическая с некоторым периодом T, то при любых a и λ*

$$\int_a^{a+T} \psi(x)\,dx = \int_{a+\lambda}^{a+\lambda+T} \psi(x)\,dx.$$

Доказательство. Прежде всего заметим, что, полагая $x-T=y$, мы получаем

$$\int_{a+T}^{a+\lambda+T} \psi(x)\,dx = \int_a^{a+\lambda} \psi(y+T)\,dy = \int_a^{a+\lambda} \psi(y)\,dy = \int_a^{a+\lambda} \psi(x)\,dx. \qquad (9.15)$$

Далее, мы имеем

$$\int\limits_a^{a+T} \psi(x)\,dx =$$
$$= \int\limits_a^{a+\lambda} \psi(x)\,dx + \int\limits_{a+\lambda}^{a+\lambda+T} \psi(x)\,dx + \int\limits_{a+\lambda+T}^{a+T} \psi(x)\,dx =$$
$$= \int\limits_a^{a+\lambda} \psi(x)\,dx - \int\limits_{a+T}^{a+\lambda+T} \psi(x)\,dx + \int\limits_{a+\lambda}^{a+\lambda+T} \psi(x)\,dx,$$

а учитывая (9.15), получаем требуемое.

Поскольку функции $\sin nx$ и $\cos nx$ при любом n, равно как и постоянная 1, являются периодическими функциями с периодом 2π, на основании леммы каждый из интегралов

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} dx, \qquad \int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cos nx\,dx,$$
$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx\,dx, \qquad \int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx\,dx$$

не изменится от «сдвига» его интервала интегрирования, т. е. при любом a

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_a^{a+2\pi} dx = 1, \qquad \int\limits_a^{a+2\pi} \sin mx \cos nx\,dx = 0,$$
$$\frac{1}{\pi}\int\limits_a^{a+2\pi} \cos^2 nx\,dx = 1, \qquad \int\limits_a^{a+2\pi} \cos mx \cos nx\,dx = 0 \quad (n \neq m),$$
$$\frac{1}{\pi}\int\limits_a^{a+2\pi} \sin^2 nx\,dx = 1, \qquad \int\limits_a^{a+2\pi} \sin mx \sin nx\,dx = 0 \quad (n \neq m).$$

Это значит, что система функций

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}},\ \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos x,\ \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin x,\ \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos 2x,\ \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin 2x,\ \ldots$$

является ортонормальной не только на сегменте $[-\pi, \pi]$, но и на любом сегменте вида $[a, a+2\pi]$.

Далее, если функция $f(x)$ является периодической с периодом 2π, то периодическими и с тем же периодом будут все функции

$$f(x)\cos nx,$$
$$f(x)\sin nx,$$

и поэтому для коэффициентов Фурье функции $f(x)$ на сегменте $[a, a+2\pi]$ мы получаем

$$\frac{1}{\pi}\int_{a}^{a+2\pi} f(x)\cos nx\,dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx=a_n,$$
$$\frac{1}{\pi}\int_{a}^{a+2\pi} f(x)\sin nx\,dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx=b_n.$$

Отсюда можно сделать два вывода.

Во-первых, при вычислении коэффициентов Фурье 2π-периодической функции $f(x)$ на сегменте $[-\pi, \pi]$ мы можем во имя удобства интегрировать нужные произведения не по этому сегменту, а по любому другому сегменту вида $[a, a+2\pi]$, распорядившись значением a так, чтобы вычисления стали более простыми или более удобными или чтобы, скажем, нам пришлось иметь дело с интегралами, значения которых нам в силу тех или иных обстоятельств уже известны.

Во-вторых, при разложении 2π-периодической функции $f(x)$ в ряд Фурье на сегменте $[a, a+2\pi]$ мы можем воспользоваться всеми теоретическими утверждениями и практическими рекомендациями, которые справедливы для случая сегмента $[-\pi, \pi]$.

Пример. Разложить в ряд Фурье на сегменте $[-\pi, \pi]$ функцию, определенную следующим образом:

$$f(x)=\begin{cases} x+2\pi, & \text{если } -\pi\leq x\leq 0, \\ x, & \text{если } 0<x\leq\pi \end{cases}$$

график этой функции изображен на рис. 7). Вычисление интегралов, выражающих коэффициенты Фурье для этой функции, неудобно, так как в каждом из них интервал интегрирования приходится разбивать на две части: от $-\pi$ до 0 и от 0 до π. Вместе с тем мы можем продолжить функцию $f(x)$ по 2π-периодичности (на графике рис. 7 это видно особенно наглядно). Таким образом, на отрезке $(0, 2\pi]$ наша функция $f(x)$ приобретает уже достаточно простой вид:

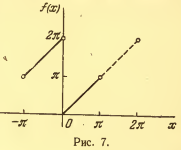


Рис. 7.

$$f(x) = x$$

(правда, для точки $x=0$ эта формула неверна, но 0 есть точка разрыва функции $f(x)$, так что значение функции в ней на ее разложение в ряд Фурье никак не влияет).

Поэтому ее коэффициентами Фурье будут

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x\,dx = \frac{1}{\pi}\,\frac{x}{2}\Big|_0^{2\pi} = 2\pi,$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x\cos nx\,dx = \frac{1}{\pi}\left(x\,\frac{1}{n}\sin nx\Big|_0^{2\pi} - \frac{1}{n}\int_0^{2\pi}\sin nx\,dx\right) = 0,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x\sin nx\,dx =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(-x\,\frac{1}{n}\cos nx\Big|_0^{2\pi} + \frac{1}{n}\int_0^{2\pi}\cos nx\,dx\right) = \frac{1}{\pi}\left(-\frac{2\pi}{n}\right) = -\frac{2}{n},$$

а ее разложением в ряд Фурье

$$\pi - 2\left(\sin x + \frac{1}{2}\sin 2x + \ldots + \frac{1}{n}\sin nx + \ldots\right).$$

§ 7. Изменение длины сегмента разложения

Если нужно разлагать в тригонометрический ряд Фурье функцию $f(x)$ на сегменте $[a, a+2l]$, длина которого $2l$, вообще говоря, отличается от 2π, то можно произвести подстановку

$$x = \frac{l}{\pi}t,$$

и функция $f\left(\frac{l}{\pi}t\right)$ будет как функция от t задаваться на сегменте $\left[\frac{a\pi}{l}, \frac{a\pi}{l}+2\pi\right]$ уже привычной нам длины 2π.

Выполним разложение функции $f\left(\frac{l}{\pi}t\right)$ (подчеркнем еще раз, что мы сейчас рассматриваем ее как функцию от t!) в ряд Фурье на сегменте $\left[\frac{a\pi}{l}, \frac{a\pi}{l}+2\pi\right]$:

$$f\left(\frac{l}{\pi}t\right)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nt+b_n\sin nt), \qquad (9.16)$$

где

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int\limits_{\frac{a\pi}{l}}^{\frac{a\pi}{l}+2\pi} f\left(\frac{l}{\pi}t\right)\cos nt\,dt, \quad n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int\limits_{\frac{a\pi}{l}}^{\frac{a\pi}{l}+2\pi} f\left(\frac{l}{\pi}t\right)\sin nt\,dt, \quad n=1,\ 2,\ \ldots \qquad (9.17)$$

Напомним, что мы здесь также имеем право, продолжив $f\left(\frac{l}{\pi}t\right)$ по 2π-периодичности, вместо интегралов (9.17) вычислять интегралы

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{l}{\pi}t\right)\cos nt\,dt, \quad n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{l}{\pi}t\right)\sin nt\,dt, \quad n=1,\ 2,\ \ldots \qquad (9.18)$$

Нам остается вернуться к переменной x, т. е. подставить как в интегралы (9.18), так и в выражение для ряда Фурье (9.16) всюду вместо переменной t ее выражение через переменную x, т. е. $\pi x/l$. Мы получим

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi}{l}x+b_n\sin\frac{n\pi}{l}x\right),$$

где

$$a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} f(x) \cos \frac{n\pi}{l} x \, dx,$$

$$b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} f(x) \cos \frac{n\pi}{l} x \, dx.$$

§ 8. Четные и нечетные функции

Как было установлено, задачу разложения функции $f(x)$ в ряд Фурье на произвольном сегменте $[a, b]$ можно свести к задаче разложения несколько видоизмененной функции на сегменте $[-\pi, \pi]$. Поэтому мы далее будем ограничиваться только этим случаем.

Итак, пусть функция $f(x)$ задана на сегменте $[-\pi, \pi]$ и удовлетворяет условиям Дирихле. Займемся исследованием двух частных случаев.

Напомним, что функция $f(x)$ называется *четной*, если

$$f(x) = f(-x)$$

во всей области ее задания, и *нечетной*, если

$$f(x) = -f(-x)$$

(также для всех тех x, для которых значение функции определено).

Как легко проверить, произведение четной функции на четную, равно как и нечетной на нечетную, четно, а произведение четной и нечетной функции нечетно.

Очевидно, если функция $f(x)$ нечетная, то

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \, dx = 0,$$

а если функция $f(x)$ четная, то

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \, dx = 2 \int_{0}^{\pi} f(x) \, dx.$$

§ 9. Разложение четной функции в ряд Фурье

Пусть функция $f(x)$ задана на сегменте $[-\pi, \pi]$, удовлетворяет условиям Дирихле и является четной. Тогда произведение

$$f(x)\sin nx$$

при любом $n=1, 2, \ldots$ должно быть нечетной функцией, и потому

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx=0.$$

Таким образом, при разложении четной функции в ряд Фурье все коэффициенты этого ряда при синусах обращаются в нуль, и разложение принимает вид

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos nx, \tag{9.19}$$

где

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx, \qquad n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$$

Описываемое формулой (9.19) представление функции $f(x)$ называется ее разложением в ряд «по косинусам».

§ 10. Разложение нечетной функции в ряд Фурье

Аналогично предыдущему, если функция $f(x)$ является нечетной, то нечетной же функцией будет при каждом n и произведение

$$f(x)\cos nx,$$

так что

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx=0,$$

и в нуль обращаются все коэффициенты Фурье при косинусах, а также свободный член. В результате мы получаем

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n\sin nx, \tag{9.20}$$

где

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) \sin nx \, dx, \qquad n = 1, 2, \ldots$$

Формула (9.20) иногда называется разложением функции $f(x)$ в ряд «по синусам».

§ 11. Разложение в ряд Фурье функций на сегменте $[0, \pi]$

Предположим теперь, что функция $f(x)$ задана нам только на сегменте $[0, \pi]$. Чтобы разложить ее в ряд Фурье на этом отрезке, мы можем поступить следующим образом. Доопределим нашу функцию на сегменте $[-\pi, 0]$. Мы будем тогда иметь функцию, заданную на всем сегменте $[-\pi, \pi]$, и получим возможность разлагать доопределенную функцию в ряд Фурье на всем сегменте $[-\pi, \pi]$.

Рис. 8.

Так как реально заданной является только часть функции на сегменте $[0, \pi]$ (добавочная часть на сегменте $[-\pi, 0]$ «пристраивается» сравнительно произвольно на основании главным образом соображений удобства), мы полученный ряд Фурье должны рассматривать только для тех значений переменной x, которые расположены в сегменте $[0, \pi]$.

Очевидно, получившийся ряд будет зависеть от того, как именно мы произведем доопределение нашей первоначально заданной функции на сегменте $[-\pi, 0]$. При этом нам могут представиться различные варианты. Рассмотрим два из них.

Во-первых, мы можем продолжить функцию $f(x)$ на сегмент $[-\pi, 0]$ по четности, т. е. положить

$$f(-x) = f(x), \qquad 0 \leq x \leq \pi$$

(рис. 8). Тогда мы будем иметь дело с четной функцией, которая, в соответствии со сказанным в § 9, разлагается в ряд по косинусам согласно формуле (9.19).

Во-вторых, мы можем продолжить функцию $f(x)$ на сегмент $[-\pi, 0]$ по нечетности, т. е. положить

$$f(-x) = -f(x)$$

(рис. 9). В этом случае мы будем иметь дело с нечетной функцией, которая разлагается в ряд по синусам согласно формуле (9.20).

Не следует думать, что нам удалось получить для одной и той же функции два различных разложения в ряд Фурье. В действительности мы разлагали весьма отличающиеся друг от друга функции (они различны на всем промежутке $[-\pi, 0]$) и только отбросили часть полученного ответа, отказываясь использовать разложение в ряд Фурье для отрицательных значений x.

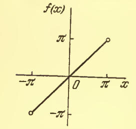


Рис. 9.

Поясним сказанное на примере.

Пример. Разложим на сегменте $[0, \pi]$ функцию $f(x) = x$ в ряды Фурье по синусам и по косинусам (что будет отвечать соответственно продолжению этой функции на сегмент $[-\pi, \pi]$ по нечетности и по четности).

Разложение этой функции по синусам было нами получено в § 5:

$$2\left(\sin x - \frac{1}{2}\sin 2x + \ldots + (-1)^{n+1}\frac{1}{n}\sin nx + \ldots\right).$$

Для того чтобы найти разложение в ряд по косинусам, вычислим интегралы

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\pi x\,dx = \frac{2}{\pi}\left.\frac{x^2}{2}\right|_0^\pi = \pi,$$

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\pi x\cos nx\,dx = \frac{2}{\pi}\left(\left. x\frac{1}{n}\sin nx\right|_0^\pi - \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin nx\,dx\right) =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(\left.-\frac{1}{n^2}(-\cos nx)\right|_0^\pi\right) = \frac{2}{\pi}\frac{\cos n\pi - 1}{n^2} = \frac{2}{\pi}\frac{(-1)^n - 1}{n^2}.$$

Такнм образом другое ннтересующее нас разложенне будет иметь внд

$$\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\left(\cos x+\frac{1}{3^2}\cos 3x+\ldots+\frac{1}{(2n+1)^2}\cos(2n+1)x+\ldots\right).$$

Отсюда вытекает одно любопытное следствне.

Обозначнм сумму последнего ряда через $c(x)$. После продолження функцнн $f(x)$ на $[-\pi, \pi]$ по четности точка 0 будет точкой непрерывностн продолженной функцнн. Поэтому согласно теореме Днрнхле

$$c(0)=f(0)=0,$$

т. е.

$$0=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\left(1+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{(2n+1)^2}+\ldots\right).$$

Если обозначить через s сумму ряда «обратных квадратов» (см. § 2 главы 3), то сумма ряда чисел, обратных четным квадратам, будет равна $\frac{1}{4}s$, так что сумма ряда, стоящего в скобках, есть $\frac{3}{4}s$. Таким образом,

$$0=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\frac{3}{4}s,$$

откуда

$$s=\frac{\pi^2}{6}$$

и мы нашлн сумму ряда «обратных квадратов».

§ 12. Комплексная форма записи ряда Фурье

Формулы Эйлера позволяют выражать тригонометрические функции через показательные функции с комплексным показателем. Следовательно, в такой комплексной форме могут быть представлены тригонометрические ряды и, в частности, ряды Фурье тех или иных функций.

Пусть

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx) \qquad (9.21)$$

— некоторый тригонометрический ряд.

Мы имеем формулы Эйлера (см. § 5 главы 7)

$$\cos nx=\frac{e^{inx}+e^{-inx}}{2},$$

$$\sin nx=i\frac{-e^{inx}+e^{-inx}}{2}.$$

Тогда

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\frac{e^{inx}+e^{-inx}}{2}+b_n i\frac{-e^{inx}+e^{-inx}}{2}\right),$$

т. е., объединяя степени с одинаковыми показателями,

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n-b_n i}{2}e^{inx}+\frac{a_n+b_n i}{2}e^{-inx}\right). \quad (9.22)$$

Введем единообразные обозначения:

$$\frac{a_0}{2}=c_0, \quad \frac{a_n-b_n i}{2}=c_n, \quad \frac{a_n+b_n i}{2}=c_{-n}. \quad (9.23)$$

Тогда (9.22) превращается в

$$f(x)=c_0+\sum_{n=1}^{\infty}c_n e^{inx}+\sum_{n=1}^{\infty}c_{-n}e^{-inx},$$

или

$$f(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n e^{inx}.$$

Таким образом, мы получили разложение функции $f(x)$ в функциональный ряд с комплексными членами. Он называется *рядом Фурье в комплексной форме*. Коэффициенты этого ряда можно вычислять не только по формулам (9.23) из коэффициентов ряда Фурье (9.21), но и непосредственно, минуя нахождение a_n и b_n.

В самом деле, вспоминая определения коэффициентов a_n и b_n, мы имеем

$$c_n=\frac{1}{2}(a_n-b_n i)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)(\cos nx-i\sin nx)\,dx=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)(\cos(-nx)+i\sin(-nx))\,dx=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\,e^{-inx}\,dx,$$

и аналогично

$$c_{-n}=\frac{1}{2}(a_n+b_n i)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)(\cos nx+i\sin nx)\,dx=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,e^{inx}\,dx=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,e^{-i(-n)x}\,dx.$$

Следовательно, при любом целом $n=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ldots$

$$c_n=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,e^{-inx}\,dx. \tag{9.24}$$

Если функция $f(x)$ вещественная (а до сих пор мы только такие функции и рассматривали), то из формул (9.23) следует, что коэффициенты c_n разложения в комплексный ряд Фурье являются комплексными сопряженными числами. Для модулей этих чисел мы имеем

$$|c_{\pm n}|=\frac{1}{2}|a_n\mp b_n i|=\frac{1}{2}\sqrt{a_n^2+b_n^2}.$$

Вспоминая интерпретацию разложения функции в тригонометрический ряд Фурье как представление движения в виде суммы (суперпозиции) гармонических колебаний (см. § 4), мы видим, что модули коэффициентов комплексного ряда Фурье являются амплитудами соответствующих гармоник.

§ 13. Разложение в комплексный ряд Фурье

Непосредственное разложение функций в комплексный ряд Фурье на основании формулы (9.24) часто оказывается удобнее, чем вычисление коэффициентов этого ряда через коэффициенты вещественного ряда Фурье по формулам (9.23).

Пример. В качестве примера рассмотрим разложение в комплексный ряд Фурье функции $f(a)=e^{ax}$ на сегменте $[-\pi,\pi]$.

При любом n мы здесь имеем

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{\alpha x} e^{-inx}\, dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{(\alpha - in)x}\, dx =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\alpha - in} e^{(\alpha - in)x} \Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\alpha - in} \left(e^{(\alpha - in)\pi} - e^{-(\alpha - in)\pi}\right).$$

Заметим, что для любого целого n

$$e^{in\pi} = \cos n\pi + i \sin n\pi = \cos n\pi = (-1)^n.$$

Поэтому

$$c_n = \frac{(-1)^n}{2\pi(\alpha - in)} \left(e^{\alpha\pi} - e^{-\alpha\pi}\right) = \frac{(-1)^n}{\pi} \operatorname{sh} \alpha\pi \frac{1}{\alpha - in}.$$

Таким образом, искомым разложением будет

$$e^{\alpha x} = \frac{\operatorname{sh} \alpha\pi}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n e^{inx}}{\alpha - in}.$$

ГЛАВА 10

УРАВНЕНИЕ СВОБОДНЫХ МАЛЫХ КОЛЕБАНИЙ СТРУНЫ С ЗАКРЕПЛЕННЫМИ КОНЦАМИ

§ 1. Уравнение свободных малых колебаний струны

Пусть мы имеем дело с гибкой упругой струной. Гибкость струны означает, что напряжение в ней может быть направлено только вдоль струны. Упругость струны означает, что процесс ее деформаций обратим, т. е. что при нем не происходит потери энергии. Струна будет считаться тонкой, т. е. ее поперечные размеры принимаются пренебрежимо малыми по сравнению с ее длиной.

Пусть длина струны равна l, а в состоянии равновесия струна расположена вдоль оси OX между точками $x=0$ и $x=l$. Если вывести струну из состояния равновесия, подвергнув ее действию какой-нибудь силы, то струна начнет колебаться. Будем считать, что движение всей струны происходит в одной плоскости и что каждая ее точка движется перпендикулярно оси OX. Смещение точки струны с координатой x в момент времени t будем обозначать через $u(x, t)$ или просто через u. Предположим далее, что все деформации струны малы. Под этим мы будем понимать, что малы как смещения u каждого из элементов струны, так и их повороты u'_x.

Рассмотрим элемент струны (см. рис. 10), который в положении равновесия имеет концами точки x и $x+\Delta x$. Пусть в результате отклонения струны в некоторый момент времени этот элемент переходит в положение MM'. Очевидно, длина элемента MM' равна

$$\int_{x}^{x+\Delta x} \sqrt{1+u_x'^2}\, dx,$$

что в предположении малости угла поворота элемента (и тем самым тангенса этого угла) приближенно равно Δx.

Рассмотрим воздействие на элемент MM' равнодействующей вертикальных составляющих сил натяжения T, действующих на его концы. Эти силы действуют в направлении касательных к струне. Обозначим углы, образуемые этими касательными с осью OX, через φ и $\varphi+\Delta\varphi$. Тогда вертикальная составляющая равнодействующей этих двух сил натяжения будет равна

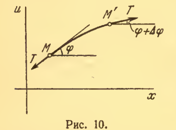


Рис. 10.

$$T\sin(\varphi+\Delta\varphi)-T\sin\varphi.$$

Ввиду малости углов φ и $\varphi+\Delta\varphi$ мы можем синусы заменить тангенсами:

$$T(\operatorname{tg}(\varphi+\Delta\varphi)-\operatorname{tg}\varphi).$$

Но тангенсы углов наклона касательных равны производным:

$$T\left(\frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{M'}-\frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{M}\right). \qquad (10.1)$$

Сила инерции, действующая на элемент MM', очевидно равна

$$\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\Delta x, \qquad (10.2)$$

где ρ — масса единицы длины струны. На основании (10.1) и (10.2) мы согласно закону Ньютона можем написать

$$T\left(\frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{M'}-\frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{M}\right)=\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\Delta x,$$

или, деля обе части этого равенства на Δx и переходя к пределу при $\Delta x\to\infty$,

$$T\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}.$$

Обозначив, наконец, отношение T/ρ через a^2, мы получим уравнение

$$a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \qquad (10.3)$$

которое и называется *уравнением свободных колебаний струны.*

§ 2. Начальные и граничные условия

Написанному уравнению удовлетворяет всякое свободное колебание струны, независимо от своего происхождения, а также от способов закрепления концов струны в точках $x=0$ и $x=l$.

Вместе с тем совершенно ясно, что если мы выведем струну из положения равновесия и предоставим самой себе, то характер ее колебаний будет один, а если, выведя из состояния равновесия, придадим ее точкам те или иные скорости, — то другой. Кроме того, неподвижное и подвижное закрепления концов струны приводят, как можно достаточно наглядно себе представить, к весьма различным ее движениям.

Из сказанного следует, что для определения движения струны, кроме уравнения (10.3), необходимо еще задать начальные условия, описывающие поведение струны в начальный момент времени $t=0$, т. е. ту форму, которую струна приобретает при выводе ее из положения равновесия,

$$u(x,\ 0)=f(x), \qquad (10.4)$$

и те скорости, которые сообщаются точкам струны при «отпускании» ее:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=\varphi(x). \qquad (10.5)$$

Кроме того, необходимо задать граничные условия задачи, т. е. описать характер поведения концов струны в процессе ее колебаний. Мы ограничимся простейшим случаем граничных условий, когда концы струны

закреплены неподвижно:

$$u(0,\ t)=0, \qquad (10.6)$$

$$u(l,\ t)=0. \qquad (10.7)$$

Разумеется, в частности, может оказаться, что в начальный момент времени струна не имеет отклонения от равновесного состояния ($f(x)\equiv 0$) или же неподвижна ($\varphi(x)\equiv 0$).

Граничные условия задачи вместе с начальными ее условиями иногда называются краевыми условиями.

§ 3. Метод разделения переменных

Рассмотрим метод решения уравнения колебаний струны методом разделения переменных, который также называется методом Фурье. Существенным для этого метода является использование рядов Фурье.

Пусть мы имеем дело с уравнением колебания струны

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \qquad (10.8)$$

причем концы струны закреплены неподвижно,

$$u(0,\ t)=u(l,\ t)=0, \qquad (10.9)$$

а начальными условиями являются

$$u(x,\ 0)=f(x), \qquad (10.10)$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=\varphi(x). \qquad (10.11)$$

Само по себе уравнение (10.8), взятое отдельно от условий (10.9) — (10.11), может иметь очень много весьма разнообразных решений. Среди них имеется и тождественно равное нулю:

$$u(x,\ t)\equiv 0.$$

Нас же интересует решение, которое удовлетворяет не только уравнению (10.8), но также граничным и начальным условиям (10.9) — (10.11). Очевидно, тождественно равное нулю решение может быть для уравнения (10.8)

лишь в том случае, когда в начальный момент времени струна находится в состоянии равновесия: $f(x) \equiv 0$ и при этом неподвижна: $\varphi(x) \equiv 0$. Во всех остальных случаях решение уравнения (10.8) тождественно равняться нулю не может.

Будем искать решение уравнения (10.8), отличное от тождественного нуля и удовлетворяющее граничным условиям (10.9), в виде произведения функции X, зависящей только от x, и функции T, зависящей только от t. Иными словами, пусть

$$u(x, t) = X(x)T(t).$$

Подстановка в уравнение (10.8) дает нам

$$X(x)T''(t) = a^2X''(x)T(t),$$

или

$$\frac{T''(t)}{aT(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}.$$

Функция, стоящая в левой части этого равенства, не зависит от x, а функция, стоящая в правой части, — от t. Следовательно, в действительности обе эти функции не зависят ни от x, ни от t, т. е. являются некоторой постоянной. Предположим, что эта постоянная отрицательная (смысл этого предположения выяснится далее), и обозначим ее через $-\lambda$:

$$\frac{T''(t)}{a^2T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda.$$

Таким образом, мы имеем

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0, \qquad (10.12)$$

$$T''(t) + \lambda a^2 T(t) = 0, \qquad (10.13)$$

откуда, решая эти дифференциальные уравнения, получаем

$$X(x) = A\cos\sqrt{\lambda}x + B\sin\sqrt{\lambda}x, \qquad (10.14)$$

$$T(t) = C\cos a\sqrt{\lambda}t + D\sin a\sqrt{\lambda}t, \qquad (10.15)$$

где A, B, C, D — некоторые постоянные, для определения которых мы воспользуемся граничными и начальными условиями.

§ 4. Использование граничных условий. Собственные функции и собственные значения

Мы имеем

$$u(x,\ t)=$$
$$=(A\cos\sqrt{\lambda}\,x+B\sin\sqrt{\lambda}\,x)\,(C\cos a\sqrt{\lambda}\,t+D\sin a\sqrt{\lambda}\,t).$$

Второй сомножитель справа не может тождественно обращаться в нуль (в противном случае мы имели бы $u\equiv 0$, что противоречит предположенному). Следовательно, для обеспечения граничных условий (10.9) должно быть

$$X(0)\equiv 0, \qquad X(l)\equiv 0.$$

Следовательно, полагая в (10.14) $x=0$ и $x=l$, мы получаем

$$0=A\cdot 1+B\cdot 0,$$
$$0=A\cos\sqrt{\lambda}\,l+B\sin\sqrt{\lambda}\,l,$$

откуда

$$A=0, \qquad B\sin\sqrt{\lambda}\,l=0. \tag{10.16}$$

Здесь $B\neq 0$, так как иначе было бы $X(x)\equiv 0$ и потому $u\equiv 0$. Поэтому из (10.16) следует, что

$$\sin\sqrt{\lambda}\,l=0,$$

т. е. при некотором целом n

$$\sqrt{\lambda}\,l=n\pi,$$

и потому

$$\sqrt{\lambda}=\frac{n\pi}{l}$$

(здесь $n\neq 0$, так как при $n=0$ должно быть $X\equiv 0$ и опять-таки $u\equiv 0$). Эти значения λ называются *собственными значениями* рассматриваемой задачи, а соответствующие им функции

$$X=B\sin\sqrt{\lambda}\,x=B\sin\frac{n\pi}{l}\,x$$

— *собственными функциями*.

Теперь выясняется смысл предположения $\lambda>0$. Если бы было $\lambda<0$, то уравнение (10.12) можно было бы

записать в виде

$$X'' - (-\lambda) X = 0,$$

откуда

$$X(x) = Ae^{\sqrt{-\lambda}x} + Be^{-\sqrt{-\lambda}x},$$

и полученное решение уравнения ни при каких значениях A и B (за исключением случая $A = B = 0$) не может одновременно удовлетворять обоим граничным условиям (10.9). Действительно, из

$$X(0) = A + B = 0,$$
$$X(l) = Ae^{\sqrt{-\lambda}l} + Be^{-\sqrt{-\lambda}l} = 0$$

следует, что $A = B = 0$.

§ 5. Использование начальных условий

Подставим найденные значения λ в уравнение (10.15):

$$T(t) = C\cos\frac{an\pi}{l}t + D\sin\frac{an\pi}{l}t.$$

При любых значениях постоянных C и D произведения

$$\sin\frac{n\pi}{l}xC\cos\frac{an\pi}{l}t \text{ и } \sin\frac{n\pi}{l}xD\sin\frac{an\pi}{l}t \qquad (10.17)$$

будут решениями уравнения (10.8), удовлетворяющими граничным условиям (10.9). В силу линейности уравнения (10.8) любая сумма функций вида (10.17) также будет решением (10.8) и также будет удовлетворять граничным условиям (10.9).

Возьмем поэтому набор функций вида

$$u_n(x, t) = \sin\frac{n\pi}{l}x\left(C_n\cos\frac{an\pi}{l}t + D_n\sin\frac{an\pi}{l}t\right)$$

и постараемся так распорядиться значениями произвольных до сих пор постоянных C_n и D_n, чтобы сумма этих функций удовлетворяла еще и начальным условиям (10.10) и (10.11). Это значит, что мы будем искать решение уравнения (10.8), удовлетворяющее граничным и

начальным условиям (10.9) — (10.11), в виде

$$u(x,\ t)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x,\ t)=$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{n\pi}{l}x\left(C_n\cos\frac{an\pi}{l}t+D_n\sin\frac{an\pi}{l}t\right). \qquad (10.18)$$

Так как мы здесь имеем дело не с суммой, а с рядом, для того чтобы этот ряд был решением уравнения (10.8), необходимо, чтобы сходился как он сам, так и ряды, получаемые из него в результате двукратного его почленного дифференцирования по x и по t.

Полагая в (10.18) $t=0$, мы имеем

$$u(x,\ 0)=f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}C_n\sin\frac{n\pi}{l}x.$$

Если на сегменте $[0,\ l]$ функция $f(x)$ разлагается в ряд Фурье по синусам, то (как это было выяснено в § 11 главы 9) в качестве коэффициентов C_n можно взять соответствующие коэффициенты Фурье:

$$C_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi}{l}x\,dx.$$

Такой выбор постоянных C_n обеспечивает соблюдение начального условия (10.10).

Переходим к начальному условию (10.11). Дифференцируя равенство (10.18) по t, мы получаем

$$\frac{\partial u(x,\ t)}{\partial t}=\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{n\pi}{l}x\left(-C_n\frac{an\pi}{l}\sin\frac{an\pi}{l}t+D_n\frac{an\pi}{l}\cos\frac{an\pi}{l}t\right),$$

или, подставляя $t=0$,

$$\left.\frac{\partial u(x,\ t)}{\partial t}\right|_{t=0}=\varphi(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{n\pi}{l}xD_n\frac{an\pi}{l}.$$

Если функция $\varphi(x)$ разлагается на сегменте $[0,\ l]$ в ряд Фурье по синусам, то в качестве величин $D_n\frac{an\pi}{l}$ можно

взять коэффициенты этого разложения:

$$D_n \frac{an\pi}{l} = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) \sin \frac{n\pi}{l} x \, dx,$$

откуда

$$D_n = \frac{2}{an\pi} \int_0^l \varphi(x) \sin \frac{n\pi}{l} x \, dx.$$

Применение рассмотренного метода Фурье оказывается оправданным, если получающийся для функции u ряд можно дважды почленно дифференцировать по каждой из переменных x и t. Поэтому, вообще говоря, после получения ряда такого рода проверку следует производить. Однако в конкретном случае уравнения колебаний струны оказывается, что ряд (10.18) дает нужное решение даже в тех случаях, когда он и не поддается указанному дифференцированию. В этом проявляется довольно частое в математике обстоятельство, состоящее в том, что формальные выкладки могут оказаться верными, даже если они и не вполне корректны. Разумеется, это замечание не может оправдывать беззаботного дифференцирования рядов без последующей проверки законности этих действий.

Прнмер. Решнм уравнение колебаний струны

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

с неподвнжными концамн

$$u(0, t) = u(l, t) = 0$$

прн начальных условнях

$$u(x, 0) = f(x) = \sin^3 x, \qquad (10.19)$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = \varphi(x) = 0. \qquad (10.20)$$

Согласно сказанному в начале этого параграфа, (формула (10.18))

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{n\pi}{l} x \left(C_n \cos \frac{an\pi}{l} t + D_n \sin \frac{an\pi}{l} t \right),$$

где C_n — коэффициенты в разложении функций $f(x)$ в ряд Фурье по синусам, а D_n — коэффициенты в разложении в ряд Фурье по синусам функции $\varphi(x)$.

Нетрудно убедиться в том, что разложением в ряд по синусам в данном случае будет

$$f(x)=\sin^3 x=\frac{3}{4}\sin x-\frac{1}{4}\sin 3x,$$

так что $C_1=\frac{3}{4}$, $C_3=-\frac{1}{4}$, а остальные коэффициенты C_n обращаются в нуль. Из (10.20) видно, что коэффициенты D_n разложения должны быть равны нулю.

Таким образом, в данном случае

$$u(x,\,t)=\frac{3}{4}\sin\frac{\pi x}{l}\cos\frac{a\pi}{l}t-\frac{1}{4}\sin\frac{3\pi x}{l}\cos\frac{3a\pi}{l}t.$$

Полученный ряд является конечной суммой, и потому все вопросы, связанные с его сходимостью и почленным дифференцированием, решаются тривиальным образом.

ГЛАВА 11

ИНТЕГРАЛ ФУРЬЕ

§ 1. Представление функций интегралом Фурье

Представление функции $f(x)$ в сегменте $[-l, l]$ рядом Фурье

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi}{l}x+b_n \sin\frac{n\pi}{l}x\right) \qquad (11.1)$$

можно истолковать следующим образом. Если функция $f(x)$ в сегменте $[-l, l]$ является «достаточно хорошей» (именно, если она в этом промежутке удовлетворяет условиям Дирихле), то для того, чтобы ее в этом сегменте полностью описать, достаточно указать некоторый, вполне определенный набор ее характеристик, коэффициентов Фурье:

$$a_0=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(t)\,dt,$$

$$a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(t)\cos\frac{n\pi}{l}t\,dt \qquad (n=1, 2, \ldots), \qquad (11.2)$$

$$b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(t)\sin\frac{n\pi}{l}t\,dt \qquad (n=1, 2, \ldots).$$

(Мы сейчас намеренно допускаем некоторую грубость в изложении и не касаемся того факта, что описание

функции ее рядом Фурье в точках разрыва может и не оказаться исчерпывающим.)

Таким образом, коэффициенты Фурье несут в себе достаточно информации о поведении функции в соответствующем конечном сегменте, сколь бы велик он ни был.

Частоты гармоник ряда Фурье (11.1) функции $f(x)$ на сегменте длины $2l$ составляют последовательность

$$0, \frac{\pi}{l}, \frac{2\pi}{l}, \frac{3\pi}{l}, \ldots,$$

которая является арифметической прогрессией с разностью $\frac{\pi}{l}$.

Заметим, что при увеличении числа l, т. е. при увеличении длины сегмента разложения функции, разности между частотами соседних гармоник уменьшаются, т. е. гармоники начинают идти все более густо.

Положение дел резко изменяется, если сегмент разложения функции, неограниченно расширяясь в обе стороны, охватывает всю вещественную прямую и превращается в бесконечный промежуток $(-\infty, +\infty)$. В этом случае естественно ожидать, что разность между частотами соседних гармоник будет убывать до нуля, т. е. что последовательность гармоник из дискретной, состоящей из отдельных изолированных чисел, превратится в непрерывное множество всех вещественных неотрицательных чисел. Естественно предположить при этом, что вместо ряда Фурье нам придется рассматривать некоторый интеграл. Этот интеграл, к рассмотрению которого мы сейчас перейдем, называется *интегралом Фурье*.

Очевидно, для представимости функции интегралом Фурье в бесконечном промежутке $(-\infty, +\infty)$ эта функция должна удовлетворять некоторым условиям, подобным условиям Дирихле, а кроме того, и еще некоторым дополнительным условиям, необходимым для избежания возможных неприятностей, возникающих в связи с тем, что при неограниченном возрастании l все интегралы вида (11.2) оказываются уже несобственными и об их сходимости требуется позаботиться специально.

§ 2. Простейшие достаточные условия представимости функции интегралом Фурье

Пусть функция $f(x)$, определенная на бесконечном промежутке $(-\infty, +\infty)$, удовлетворяет следующим условиям:

1) существует несобственный интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\, dx = Q$$

(это свойство функции $f(x)$ называется ее абсолютной интегрируемостью);

2) в любом конечном сегменте функция $f(x)$ разлагается в ряд Фурье (практически достаточно потребовать, чтобы функция в любом конечном сегменте удовлетворяла условиям Дирихле).

При соблюдении этих условий мы можем рассуждать следующим образом.

Фиксируем некоторое произвольное l и напишем разложение функции $f(x)$ в ряд Фурье в сегменте $[-l, l]$:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\frac{n\pi}{l} x + b_n \sin\frac{n\pi}{l} x\right), \qquad (11.3)$$

где коэффициенты определяются по формулам (11.2). Ясно, что при этом коэффициенты a_n и b_n зависят не только от функции $f(x)$, но и от параметра l (значение l фигурирует в пределах интегралов в формулах (11.2)).

Подставим теперь в ряд (11.3) выражения для коэффициентов, даваемые формулами (11.2). Мы получим

$$f(x) = \frac{1}{2l} \int_{-l}^{l} f(t)\, dt + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\left(\frac{1}{l} \int_{-l}^{l} f(t) \cos\frac{n\pi}{l} t\, dt\right) \cos\frac{n\pi}{l} x + \right.$$
$$\left. + \left(\frac{1}{l} \int_{-l}^{l} f(t) \sin\frac{n\pi}{l} t\, dt\right) \sin\frac{n\pi}{l} x\right),$$

или

$$f(x)=\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(t)\,dt+$$
$$+\frac{1}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\int_{-l}^{l} f(t)\left(\cos\frac{n}{l}t\cos\frac{n\pi}{l}x+\sin\frac{n\pi}{l}t\sin\frac{n\pi}{l}x\right)dt$$

или

$$f(x)=\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(t)\,dt+\frac{1}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\int_{-l}^{l} f(t)\cos\frac{n\pi}{l}(x-t)\,dt.$$

Вводя зависящую от n переменную $\alpha_n=\alpha$:

$$\frac{n\pi}{l}=\alpha_n=\alpha, \tag{11.4}$$

и полагая

$$\alpha_{n+1}-\alpha_n=\frac{(n+1)\pi}{l}-\frac{n\pi}{l}=\frac{\pi}{l}=\Delta\alpha,$$

имеем

$$f(x)=\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(t)\,dt+\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_{-l}^{l} f(t)\cos\alpha_n(x-t)\,dt\right)\Delta\alpha. \tag{11.5}$$

По мере возрастания l интеграл

$$\int_{-l}^{l} f(t)\cos\alpha(x-t)\,dt$$

все меньше отличается от несобственного интеграла

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\alpha(x-t)\,dt.$$

Кроме того, сумма, стоящая в правой части формулы (11.5), напоминает интегральную сумму. В ней с ростом l число слагаемых увеличивается, а каждое слагаемое уменьшает свой «удельный вес». Поэтому естественно предполагать, что при возрастании l эта сумма в (11.5)

стремится к интегралу по α:

$$\int_0^\infty \left(\int_{-\infty}^\infty f(t) \cos \alpha (x-t)\, dt \right) d\alpha.$$

Далее, первое слагаемое в (11.5) справа по мере роста l стремится к нулю. В самом деле,

$$\left| \frac{1}{2l} \int_{-l}^{l} f(t)\, dt \right| \leq \frac{1}{2l} \int_{-l}^{l} |f(t)|\, dt \leq \frac{1}{2l} Q \to 0.$$

Таким образом, в пределе, при $l \to \infty$, формула (11.5) превращается в следующую:

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \left(\int_{-\infty}^\infty f(t) \cos \alpha (x-t)\, dt \right) d\alpha. \qquad (11.6)$$

Эта формула называется *интегральной формулой Фурье*, а стоящий в ней интеграл — *интегралом Фурье*. Представление функции в виде правой части формулы (11.6) обычно называется *разложением* этой функции *в интеграл Фурье*.

Ясно, что все только что сказанное здесь касалось только тех точек x, в которых функция f непрерывна. Для точек разрыва f справедлива, как и в случае рядов Фурье, интегральная формула, описывающая полусумму пределов функции справа и слева:

$$\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2} = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \left(\int_{-\infty}^\infty f(t) \cos \alpha (x-t)\, dt \right) d\alpha. \quad (11.7)$$

Итак, мы приходим к формулировке следующей теоремы.

Теорема Фурье. *Если функция $f(x)$ на бесконечном промежутке $(-\infty, +\infty)$ является ограниченной и абсолютно интегрируемой, а в каждом конечном промежутке удовлетворяет условиям Дирихле, то для любого x имеет место равенство* (11.6), *если x есть точка непрерывности функции $f(x)$, и равенство* (11.7), *если x есть точка разрыва этой функции.*

Заметим, что в формуле (11.6) внутренний интеграл представляет собой некоторую функцию от α. Так как эта функция зависит не от самой переменной α, а от ее косинуса, она должна быть четной. Поэтому мы можем формулу (11.6) переписать в следующем виде:

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\cos\alpha(x-t)\,dt\right)d\alpha. \quad (11.8)$$

Мы привели правдоподобные соображения в пользу справедливости теоремы Фурье, которые, разумеется, нельзя считать ее доказательством. Доказательство теоремы Фурье довольно сложно и выходит за пределы нашего курса.

Пример. Пусть

$$f(x)=\begin{cases}e^{-x}, & \text{если } x\geqq 0,\\ 0, & \text{если } x<0\end{cases}$$

(график фуикции $f(x)$ изображеи на рис. 11).

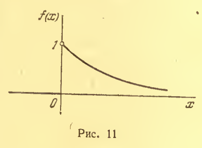


Рис. 11

Очевидно, что при любом $x\geqq 0$

$$e^{-x}\leqq 1$$

и

$$\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|\,dx=\int_{0}^{\infty}e^{-x}\,dx=-e^{-x}\Big|_{0}^{\infty}=1.$$

Следовательно, функция $f(x)$ в промежутке $(-\infty, +\infty)$ является ограиичеиной и абсолютно интегрируемой.

Кроме того, фуикция e^{-x} моиотоиио убывает, и потому фуикция $f(x)$ тривиальиым образом удовлетворяет условиям Дирихле.
Из сказаииого следует, что, согласио теореме Фурье, фуикция $f(x)$ разлагается в иитеграл Фурье согласио формуле (11.6). Выпишем это разложеиие в явиом виде (т. е. без виутреииего интеграла, стоящего в правой части этой формулы).

Мы имеем в рассматриваемом случае

$$I(x, \alpha)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos \alpha(x-t)\, dt=\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t} \cos \alpha(x-t)\, dt,$$

или, производя дважды иитегрироваиие по частям,

$$I(x, \alpha)=-e^{-t} \cos \alpha(x-t)\Big|_0^{\infty}+\alpha \int_0^{\infty} e^{-t} \sin \alpha(x-t)\, dt=$$
$$=\cos \alpha x-\alpha e^{-t} \sin \alpha(x-t)\Big|_0^{\infty}-\alpha^2 \int_0^{\infty} e^{-t} \cos \alpha(x-t)\, dt=$$
$$=\cos \alpha x+\alpha \sin \alpha x-\alpha^2 I(x, \alpha).$$

Отсюда следует, что

$$I(x, \alpha)=\frac{1}{1+\alpha^2}(\cos \alpha x+\alpha \sin \alpha x).$$

Зиачит, формула (11.6) приобретает в этом случае следующий вид:

$$f(x)=\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\cos \alpha x+\alpha \sin \alpha x}{1+\alpha^2}\, d\alpha.$$

§ 3. Интеграл Фурье для четных функций

Заметим, прежде всего, что при любом α

$$|\cos \alpha t| \leqq 1,$$

так что

$$\int_{-l}^{l}|f(t) \cos t\alpha|\, dt \leqq \int_{-l}^{l}|f(t)|\, dt.$$

Следовательно, если функция $f(x)$ абсолютно интегрируема на бесконечном промежутке $(-\infty,+\infty)$, то

несобственный интеграл

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\alpha t\,dt \tag{11.9}$$

существует. В силу аналогичных причин существует при любом α и несобственный интеграл

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin\alpha t\,dt. \tag{11.10}$$

Вспоминая, что

$$\cos\alpha(x-t)=\cos\alpha x\cos\alpha t+\sin\alpha x\sin\alpha t,$$

перепишем формулу (11.6) в следующем виде:

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\infty}\left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\alpha t\,dt\right)\cos\alpha x\,d\alpha+ \\ +\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\infty}\left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin\alpha t\,dt\right)\sin\alpha x\,d\alpha. \tag{11.11}$$

Предположим теперь, что функция $f(x)$ четная. Тогда четными должны быть все функции вида $f(t)\cos\alpha t$ и нечетными — все функции вида $f(t)\sin\alpha t$. Следовательно, в этом случае все несобственные интегралы (11.10) обращаются в нуль, а для каждого из несобственных интегралов (11.9) мы можем написать

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\alpha t\,dt=2\int\limits_0^{\infty} f(t)\cos\alpha t\,dt.$$

Таким образом, в случае четной функции $f(x)$ формула (11.11) может быть переписана как

$$f(x)=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\infty}\left(\int\limits_0^{\infty} f(t)\cos\alpha t\,dt\right)\cos\alpha x\,d\alpha. \tag{11.12}$$

Пример. Разложить в интеграл Фурье четную функцию $f(x)$, где

$$f(x)=\begin{cases}1, \text{ если } |x|\leqq l,\\ 0 \text{ в противном случае}\end{cases}$$

(график функции $f(x)$ см. на рис. 12).

То, что функция $f(x)$ ограничена, абсолютно интегрируема в бесконечном промежутке и удовлетворяет условиям Дирихле в любом конечном сегменте, проверяется без труда.

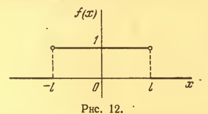


Рис. 12.

Следовательно, требуемое разложение в интеграл Фурье существует. Для его нахождения вычислим

$$\int_0^\infty f(t)\cos\alpha t\,dt = \int_0^l \cos\alpha t\,dt = \frac{1}{\alpha}\sin\alpha l.$$

Таким образом, искомым разложением является

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin\alpha l}{\alpha}\cos\alpha x\,d\alpha.$$

Эта формула справедлива для всех значений x, за исключением $x = \pm l$. В этих двух исключительных точках интеграл Фурье принимает значение, равное 1/2.

§ 4. Интеграл Фурье для нечетных функций

Если функция $f(x)$ нечетная, то нечетной же будет и функция $f(t)\cos\alpha t$ и четной — функция $f(t)\sin\alpha t$. Поэтому при нечетной функции $f(x)$ в нуль обращается при любом значении α интеграл (11.9), а для интеграла вида (11.10) справедливо

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin\alpha t\,dt = 2\int_0^\infty f(t)\sin\alpha t\,dt.$$

Следовательно, в случае нечетной функции $f(x)$ формула (11.11) приобретает вид

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty\left(\int_0^\infty f(t)\sin\alpha t\,dt\right)\sin\alpha x\,d\alpha. \qquad (11.13)$$

Пример. Разложить в интеграл Фурье нечетную функцию $f(x)$, для которой

$$f(x)=\begin{cases} x, \text{ если } |x| \leq l, \\ 0 \text{ в противном случае} \end{cases}$$

(график этой функции см. на рис. 13).

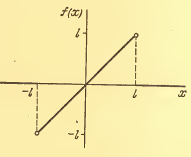


Рис. 13.

Ясно, что функция $f(x)$ ограничена, абсолютно интегрируема и удовлетворяет условиям Дирихле там, где это нужно. Переходим к вычислению внутреннего интеграла в формуле (11.13). Мы имеем

$$I(\alpha)=\int_0^\infty f(t)\sin\alpha t\,dt=\int_0^l t\sin\alpha t\,dt$$

или, интегрируя по частям,

$$I(\alpha)=-\frac{1}{\alpha}t\cos\alpha t\Big|_0^l+\frac{1}{\alpha}\int_0^l\cos\alpha t\,dt=-\frac{l\cos\alpha l}{\alpha}+\frac{\sin\alpha l}{\alpha^2}.$$

Поэтому

$$f(x)=-\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\frac{\alpha l\cos\alpha l-\sin\alpha l}{\alpha^2}\sin\alpha x\,d\alpha.$$

Эта формула справедлива для всех значений x, за исключением $x=\pm l$. (Для $x=\pm l$ значение правой части формулы будет вдвое меньше значения ее левой части.)

§ 5. Комплексная форма интеграла Фурье

Вернемся к интегральной формуле Фурье (формула (11.8))

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\cos\alpha(x-t)\,dt\right)d\alpha \qquad (11.14)$$

и применим к имеющемуся в этой формуле косинусу формулу Эйлера:

$$\cos\alpha(x-t)=\frac{1}{2}\left(e^{i\alpha(x-t)}+e^{-i\alpha(x-t)}\right).$$

Мы получим

$$f(x)=\frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\left(e^{i\alpha(x-t)}+e^{-i\alpha(x-t)}\right)dt\right)d\alpha,$$

или

$$f(x)=\frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\,e^{i\alpha(x-t)}\,dt\right)d\alpha+$$

$$+\frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\,e^{-i\alpha(x-t)}\,dt\right)d\alpha.$$

Здесь, как нетрудно убедиться подстановкой $z=-\alpha$, интегралы, стоящие в правой части, равны друг другу. Поэтому

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\,e^{i\alpha(x-t)}\,dt\right)d\alpha. \qquad (11.15)$$

Полученная формула называется *разложением функции $f(x)$ в интеграл Фурье в комплексной форме.*

Примеры.

1. Найдем интеграл Фурье в комплексной форме для уже рассмотренной нами в § 3 функции

$$f(x)=\begin{cases}1 \text{ для } |x|\leqq l,\\ 0 \text{ для } |x|>l.\end{cases}$$

В этом случае вычисление внутреннего интеграла в правой части формулы (11.15) дает нам

$$\int_{-l}^{l} e^{i\alpha(x-t)}\,dt = -\frac{1}{i\alpha}e^{i\alpha(x-t)}\Bigg|_{-l}^{l} = -\frac{1}{i\alpha}\left(e^{i\alpha(x-l)}-e^{i\alpha(x+l)}\right) =$$

$$= \frac{e^{i\alpha x}}{\alpha}\cdot\frac{e^{i\alpha l}-e^{-i\alpha l}}{i} = \frac{e^{i\alpha x}}{\alpha}\,2\sin\alpha l.$$

Поэтому формула (11.15) приобретает в данном случае следующий вид:

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin\alpha l}{\alpha}e^{i\alpha x}\,d\alpha.$$

2. Разложим в интеграл Фурье в комплексной форме функцию $f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$ (см. рис. 14).

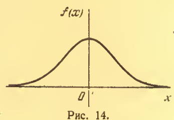


Рис. 14.

Мы имеем

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}e^{i\alpha(x-t)}\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}+i\alpha x-i\alpha t}\,dt = e^{i\alpha x}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}-i\alpha t}\,dt =$$

$$= e^{i\alpha x}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(t+i\alpha)^2-\frac{\alpha^2}{2}}\,dt = e^{i\alpha x-\frac{\alpha^2}{2}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(t+i\alpha)^2}\,dt.$$

Последний интеграл является функцией от α. Обозначим его через $I(\alpha)$ и вычислим его. Мы имеем

$$I(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(t+i\alpha)^2}\,dt = \lim_{A\to\infty}\int_{-A}^{A} e^{-\frac{1}{2}(t+i\alpha)^2}\,dt,$$

или, делая подстановку

$$t + i\alpha = z,$$

мы получим

$$I(\alpha) = \lim_{A\to\infty}\int_{-A+i\alpha}^{A+i\alpha} e^{-\frac{1}{2}z^2}\,dz.$$

Продифференцируем это тождество по α. Ввиду того, что сходимость к пределу является по α равномерной в любом конечном промежутке, дифференцирование под знаком предела законно. Мы имеем

$$\frac{d}{d\alpha} I(\alpha) = \lim_{A \to \infty} \frac{d}{d\alpha} \int_{-A+i\alpha}^{A+i\alpha} e^{-\frac{1}{2} z^2} dz.$$

Выполняя дифференцирование интеграла по верхнему и нижнему пределам, мы получаем

$$\frac{d}{d\alpha} I(\alpha) = \lim_{A \to \infty} \left(ie^{-\frac{1}{2}(A+i\alpha)^2} - ie^{-\frac{1}{2}(-A+i\alpha)^2} \right),$$

а вспомнная формулу (7.14) и переходя к пределу, будем иметь

$$\frac{d}{d\alpha} I(\alpha) = 0.$$

Следовательно, первообразная функция должна быть постоянной:

$$I(\alpha) = \text{const}.$$

В частности, должно быть

$$I(\alpha) = I(0).$$

Вычислим интеграл $I(0)$. Запишем его для этого дважды:

$$I(0) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx, \qquad I(0) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{y^2}{2}} dy,$$

и перемножим почленно эти равенства. Мы получим

$$I^2(0) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{y^2}{2}} dy = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} dx\, dy.$$

Переходя в двойном интеграле к полярным координатам, мы имеем

$$I^2(0) = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{\infty} e^{-\frac{\rho^2}{2}} \rho\, d\rho \right) d\varphi = \int_0^{\infty} e^{-\frac{\rho^2}{2}} d\frac{\rho^2}{2} \int_0^{2\pi} d\varphi =$$

$$= 2\pi \left(-e^{-\frac{\rho^2}{2}} \Big|_0^{\infty} \right) = 2\pi,$$

откуда

$$I(0) = \sqrt{2\pi}.$$

Таким образом,

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} e^{i\alpha(x-t)}\,dt = e^{i\alpha x - \frac{1}{2}\alpha^2}\sqrt{2\pi}, \qquad (11.16)$$

и искомым разложением в интеграл Фурье является

$$e^{-\frac{x^2}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\alpha x - \frac{1}{2}\alpha^2}\,d\alpha$$

§ 6. Понятие о преобразовании Фурье

Перепишем формулу (11.15), заменяя α на $-\alpha$, в следующем виде:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{i\alpha t}\,dt \right) e^{-i\alpha x}\,d\alpha,$$

и положим

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{i\alpha t}\,dt = F(\alpha). \qquad (11.17)$$

Тогда, очевидно, будет

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(\alpha)\, e^{-i\alpha x}\,d\alpha = f(x). \qquad (11.18)$$

Определение. Переход от функции $f(x)$ к функции $F(\alpha)$, описываемый формулой (11.17), называется *преобразованием Фурье функции* $f(x)$. Часто преобразованием Фурье функции $f(x)$ называется сама функция $F(\alpha)$. Обратный переход от функции $F(\alpha)$ к функции $f(x)$, описываемый формулой (11.18), называется обратным преобразованием Фурье. Также обратным преобразованием Фурье функции $F(\alpha)$ называется функция $f(x)$.

Пример. Вообще говоря, сами функции имеют мало общего с функциями, которые являются их преобразованиями Фурье. Одной из немногих функций, совпадающих со своими преобразованиями Фурье, является

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

В том, что для этой функции действительно

$$F(\alpha)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,e^{-\frac{\alpha^2}{2}},$$

нас убеждает второй пример из предыдущего параграфа. В самом деле, в этом случае мы имеем

$$F(\alpha)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)\,e^{i\alpha t}\,dt=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,e^{-\frac{t^2}{2}}e^{i\alpha t}\,dt=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}e^{i\alpha t}\,dt,$$

или, пользуясь формулой (11.16), полагая в ней $x=0$ и заменяя α на $-\alpha$, получаем требуемое. Перечисление остальных функций, совпадающих со своими преобразованиями Фурье, является более сложным делом, на котором мы не будем останавливаться.

§ 7. Косинус-преобразование Фурье

Пусть $f(x)$ — четная функция. Вспомним формулу (11.12)

$$f(x)=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\infty}\left(\int\limits_0^{\infty} f(t)\cos\alpha t\,dt\right)\cos\alpha x\,d\alpha,$$

перепишем ее в виде

$$f(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_0^{\infty}\left(\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_0^{\infty} f(t)\cos\alpha t\,dt\right)\cos\alpha x\,d\alpha \qquad (11.19)$$

и положим

$$F(\alpha)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_0^{\infty} f(t)\cos\alpha t\,dt. \qquad (11.20)$$

Тогда (11.19) даст нам

$$f(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_0^{\infty} F(\alpha)\cos\alpha x\,d\alpha. \qquad (11.21)$$

Формула (11.20) определяет *косинус-преобразование Фурье* четной функции $f(x)$, приводящее к функции $F(\alpha)$, также называемой косинус-преобразованием функции $f(x)$. Формула (11.21) определяет обратное косинус-преобразование.

§ 8. Синус-преобразование Фурье

Для нечетной функции $f(x)$ мы можем сослаться на формулу (11.13)

$$f(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\left(\int_0^\infty f(t)\sin\alpha t\,dt\right)\sin\alpha x\,d\alpha$$

и по аналогии с предыдущим определить *синус-преобразование Фурье*

$$\Phi(\alpha)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty f(t)\sin\alpha t\,dt$$

и обратное синус-преобразование

$$f(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty \Phi(\alpha)\sin\alpha x\,d\alpha.$$

Пример. Рассмотрим фуикцию

$$f(x)=e^{-\beta x},$$

определеииую только для $x>0$. Последиее озиачает, что мы можем, продолжая нашу фуикцию $f(x)$ на область отрицательиых значений по четности или по иечетиостн, найти как косииус-преобразоваиие этой функцин, так н ее сииус-преобразование.

Для косииус-преобразоваиия мы имеем

$$F(\alpha)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty e^{-\beta t}\cos\alpha t\,dt.$$

Вычисляя последний интеграл двукратиым иитегрироваиием по частям (подобио тому как вычислялся иитеграл в примере в § 2), мы получаем

$$F(\alpha)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\beta}{\beta^2+\alpha^2}.$$

Аиалогичио для сииус-преобразоваиия этой функции —

$$\Phi(\alpha)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\alpha}{\beta^2+\alpha^2}.$$

§ 9. Спектральная функция

Положим

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,e^{-i\alpha t}\,dt = F(\alpha).$$

Тогда

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(\alpha)\,e^{i\alpha x}\,d\alpha = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,e^{i\alpha(x-t)}\,dt\,d\alpha.$$

В силу (11.15) последний интеграл есть $f(x)$. Таким образом,

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\alpha)\,e^{i\alpha x}\,d\alpha. \qquad (11.22)$$

С механической точки зрения функция $e^{i\alpha x}$ при любом значении α описывает некоторое гармоническое колебание. В соответствии с этим интегральное представление (11.22) функции $f(x)$ можно понимать как представление описываемого этой функцией движения в виде бесконечной непрерывной системы независимых колебаний с различными частотами. Функция $F(\alpha)$ показывает при этом, с какой интенсивностью происходят колебания, соответствующие различным значениям α. Нетрудно проверить (это делается совершенно так же, как в § 11 главы 9 для случая рядов Фурье), что модуль $|F(\alpha)|$ есть амплитуда колебания, соответствующего данному значению α.

Функция $F(\alpha)$ называется *спектральной функцией* для исходной функции $f(x)$.

Николай Николаевич Воробьев

ТЕОРИЯ РЯДОВ

(Серия: «Избранные главы высшей математики для инженеров и студентов втузов»)

М., 1973 г., 208 стр. с илл.

Редакторы *А. С. Чистопольский, М. М. Горячая.*
Техн. редактор *С. Я. Шкляр.*
Корректор *Н. Б. Румянцева.*

Сдано в набор 23/I 1973 г. Подписано к печати 6/III 1973 г. Бумага $84 \times 108^1/_{32}$, тип. № 2. Физ. печ л. 6,5. Условн. печ. л. 10,92. Уч.-изд. л. 10,95. Тираж 35 000 экз. Т-00783. Цена книги 38 коп. Заказ № 671.

Издательство «Наука»
Главная редакция
физико-математической литературы
117071, Москва, В-71. Ленинский проспект, 15.

Ордена Трудового Красного Знамени Ленинградская типография № 1 «Печатный Двор» имени А. М Горького Союзполиграфпрома при Государственном комитете Совета Министров СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли, Ленинград, Гатчинская ул., 26.

Цена 38 коп.